

**Die lineare Parametrisierung der Makroturbulenz
eines quasi-geostrophischen Zirkulationsmodells**

Gisela Hartjenstein

1970

Die lineare Parametrisierung der Makroturbulenz
eines quasi-geostrophischen Zirkulationsmodells

Inaugural-Dissertation

zur

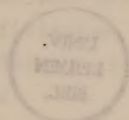
Erlangung des Doktorgrades

des

Fachbereichs Physik

der Ludwig-Maximilians Universität

zu München



vorgelegt

von

Gisela Hartjenstein

aus Düsseldorf

Dezember 1977

1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Egger

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hofmann

Tag der mündlichen Prüfung: 14.2.1978



Inhalt

Zusammenfassung	
Einleitung	1
I. Das dreidimensionale Zirkulationsmodell	8
1. Physikalische Grundlagen und Modellgleichungen	8
2. Spektrale Darstellung der Modellgleichungen	11
3. Numerisches Lösungsverfahren	15
4. Lösungen mit verschiedenen Zwangsfunktionen und unterschiedlicher spektraler Auflösung	16
II. Das zonal gemittelte Modell	29
1. Der lineare Parametrisierungsansatz	30
2. Berechnung der Parametrisierungskoeffizienten	31
3. Spektrale Analyse der Lösungen der nichtlinearen Modellgleichungen	36
4. Numerisches Lösungsverfahren für die linearen Gleichungen	40
III. Lösungen des zonal gemittelten Modells	41
1. Konstante Parametrisierungskoeffizienten	41
2. Zeitliche Änderung der inhomogenen Parametri- sierungskoeffizienten	46
3. Zeitliche Änderung aller Parametrisierungs- koeffizienten	53
IV. Parametrisierung mit Hilfe eines Austauschansatzes	56
1. Der Austauschansatz im quasi-geostrophischen Zwei-Schichten-Modell	56
2. Spektrale Darstellung des Austauschansatzes	59
3. Lösungen und Diskussion der Ergebnisse	62
V. Energiebetrachtungen	68
1. Energiezyklus im dreidimensionalen Modell	68
2. Energieumwandlungen im zonal gemittelten Modell	75
VI. Schlußbemerkung	81
Literaturverzeichnis	83
Verzeichnis der verwendeten Symbole	85
Lebenslauf	88

Zusammenfassung

Eine neue Methode zur Parametrisierung der Makroturbulenz wird für ein zonal gemitteltes quasi-geostrophisches Modell entwickelt. Die Divergenzen der makroturbulenten Transporte werden durch einen linearen Ansatz parametrisiert, der im Gegensatz zum Austauschansatz die Transporte mit sämtlichen zonal gemittelten Größen verknüpft. Das Ziel ist, die Lösungen eines dreidimensionalen nichtlinearen Zirkulationsmodells (Vergleichsmodell) zu simulieren. Die Ergebnisse des Vergleichsmodells werden analytisch approximiert und dem linearen zonal gemittelten Modell als Lösung vorgeschrieben. Das ermöglicht die Berechnung der unbekannten Parameter des linearen Differentialgleichungssystems (Parametrisierungskoeffizienten). Auf diese Weise werden die erwünschten Lösungen des zonal gemittelten Modells erzwungen, sofern die gleiche Zwangsfunktion wie im Vergleichsmodell verwendet wird. Es gelingt, auch kurzzeitige Schwankungen des zonalen Grundstroms (Intensität und Lage) zu simulieren.

Die Reaktion des so gewonnenen parametrisierten Modells auf eine sich ändernde Zwangsfunktion wird anschließend untersucht. Dabei zeigt es sich, daß nun zeitabhängige Parametrisierungskoeffizienten erforderlich sind. Eine konsequente Durchführung des hier angewendeten Verfahrens, das darauf beruht, die gewünschte Lösung zu erzwingen, ist nicht mehr möglich. So wird lediglich eine im Zeitmittel gute Simulation erzielt. Die Durchführung einer Parametrisierung mit Hilfe des konventionellen Austauschansatzes ermöglicht einen Vergleich mit der in dieser Arbeit entwickelten Methode. Es stellt sich heraus, daß der Austauschansatz - als Spezialfall des hier benutzten allgemeinen linearen Ansatzes - lediglich zeitlich geglättete Lösungen liefern kann.

Vergleichende Betrachtungen der Energetik des zonal gemittelten Modells und des Zirkulationsmodells unterstreichen die Leistungsfähigkeit der hier entwickelten Parametrisierungsmethode.

Einleitung

In den letzten Jahren ist die Klimaforschung immer mehr in den Vordergrund gerückt. Einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis des Klimas und der Wirkungsweise von klimaverändernden Faktoren (z.B.: Änderung der Solarkonstante, der Eisbedeckung, der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre) liefern numerische Modelle zur Klimasimulation. Diese sind von sehr unterschiedlicher Bauart. Ausschlaggebend für die Ausgestaltung eines Modells ist die zeitliche und räumliche Größenordnung des zu untersuchenden Phänomens. Soll das Modell zur Simulation (und damit zum Verständnis) der Allgemeinen Zirkulation dienen, so muß es auch in der Lage sein, das Verhalten der wesentlichen Bestandteile der atmosphärischen Zirkulation, nämlich der planetarischen Wellen, der Hoch- und Tiefdruckgebiete, zu beschreiben. Ein solches "Zirkulationsmodell" ist dreidimensional und es sollte für die horizontalen Richtungen ein Auflösungsvermögen von einigen 100 Kilometern haben. Die Zirkulationsmodelle eignen sich z.B. zu Untersuchungen, welchen Einfluß regional begrenzte Änderungen der Randbedingungen (Meeresoberflächentemperaturen, Eisbedeckung, anthropogene Einflüsse) auf die Atmosphäre haben, sofern sich diese Änderungen in Zeiträumen von einigen Wochen oder Monaten abspielen. Längerwährende Prozesse können aber mit einem Zirkulationsmodell nicht mehr simuliert werden, da zu große Rechenzeiten erforderlich wären. In solchen Fällen muß der Rechenaufwand durch die Einschränkung der Anzahl der Modellvariablen durch großräumige oder zeitliche Mittelungen reduziert werden. Als Beispiel sei das zonal gemittelte Modell genannt. Abhängigkeiten von der geographischen Länge sind hier herausgemittelt, es handelt sich also um ein zweidimensionales Modell. Die Aufgabe eines solchen zonal gemittelten Modells besteht darin, die Reaktion der Atmosphäre auf langfristig sich ändernde globale Einflüsse (Zwangs-

funktionen), sei es der Antrieb der Atmosphäre (einfallende Strahlung) oder die Randbedingungen (z.B.: Albedo) zu testen. Weiterhin erscheint die Verwendung eines zonal gemittelten Modells der Atmosphäre zur Kopplung an ein Ozeanmodell sinnvoll, da der Ozean im Vergleich zur Atmosphäre sehr langsam reagiert, so daß langfristige Rechnungen erforderlich sind.

Viele Probleme der physikalischen und mathematischen Beschreibung der Atmosphäre liegen in der Nichtlinearität der hydrodynamischen Gleichungen begründet. Da die nichtlinearen Gleichungen im allgemeinen nicht analytisch gelöst werden können, müssen numerische Methoden zu ihrer Lösung herangezogen werden. Die numerischen Methoden machen eine Mittelbildung bei den Gleichungen notwendig. Dabei treten wegen der Nichtlinearität neben den mittleren Größen auch noch Korrelationsprodukte aus den Abweichungen von den Mittelwerten auf. Diese Korrelationsprodukte beinhalten diejenigen physikalischen Prozesse, deren charakteristische Abmessungen (Länge und Zeit) kleiner sind als die Zeit bzw. die Länge, über die gemittelt wird (subskalige Prozesse). Das Gleichungssystem ist nun wegen dieser zusätzlich auftretenden Variablen nicht mehr geschlossen. Zur Schließung des Systems müssen Hypothesen aufgestellt werden, die zwischen den Korrelationsprodukten und den mittleren (skaligen) Größen mit Hilfe empirischer Parameter eine Beziehung herzustellen gestatten (Parametrisierung). Es könnten zwar für die Korrelationsprodukte Prognosegleichungen abgeleitet werden, doch wird das Problem der Schließung damit nur auf eine höhere Stufe geschoben, da dann Dreifachkorrelationen auftreten, die wiederum parametrisiert werden müssen.

Die Korrelationsprodukte, die bei der Mittelbildung der hydrodynamischen Gleichungen entstehen, setzen sich immer aus einer Geschwindigkeitskomponente und einer anderen Größe zusammen.

Es handelt sich also um die Transporte der verschiedenen atmosphärischen Größen durch die von dem Modell nicht mehr aufgelösten Bewegungen. In einem Zirkulationsmodell sind dieses die Transporte von Impuls, fühlbarer und latenter Wärme, die etwa durch die kleinräumige Turbulenz (Mikroturbulenz) in der atmosphärischen Grenzschicht oder durch mesoskalige Prozesse bewerkstelligt werden. In einem zonal gemittelten Modell sind zusätzlich die von den planetarischen Wellen, Zyklonen und Antizyklonen verursachten vertikalen und meridionalen Transporte von Impuls und Wärme als subska-
lig zu betrachten. Die Auffassung, daß diese großräumigen Druckgebilde Turbulenzelemente eines gestörten Grundstroms (hier: zonaler Grundstrom = zirkumpolarer Wirbel) seien, geht auf Defant (1921) zurück, der erstmals den Begriff der Makroturbulenz als Bezeichnung für die langen Wellen, Hoch- und Tiefdruckgebiete einführte. In Analogie zur Mikroturbulenz sollte - nach Defant - auch für die makroturbulenten Transporte ein Gradientansatz Anwendung finden.

Beim Gradientansatz (auch Austauschansatz) wird der Transport einer Größe proportional zum negativen Gradienten der gemittelten Größe angesetzt. Der Ansatz wird bevorzugt zur Parametrisierung der mikroturbulenten Transporte angewendet. Man stützt sich dabei auf eine gewisse Analogie zwischen mikroturbulenten und molekularen Transporten. In beiden Fällen bewirken die Transporte einen Ausgleich von Gegensätzen. Solche Diffusionsvorgänge können durch einen Gradientansatz beschrieben werden. Wichtige Voraussetzung dafür ist allerdings, daß die transportierte Größe konservativ ist. Während im molekularen Bereich nun z.B. der Impuls eines Teilchens zwischen zwei Stößen (freie Weglänge) erhalten bleibt, ist der Impuls in kontinuierlichen Medien keine Erhaltungsgröße mehr. Eine gewisse Berechtigung für den Gradientansatz besteht in der Mikrotur-

bulenz dennoch, da hier kleine Mittelungsintervalle benutzt werden können, bei denen der Impuls als einigermaßen konservativ betrachtet werden kann (Prandtl'sche Mischungsweghypothese). Der Proportionalitätsfaktor des Gradientansatzes wird in Analogie zur molekularen Diffusion turbulenter Diffusionskoeffizient (Austauschkoeffizient) genannt.

Nach dem Gesagten erscheint die Anwendung des Gradientansatzes für die makroturbulenten Transporte erst recht nicht mehr erfolgversprechend. Zum Beispiel kann der Impuls hier sicher nicht mehr als konservativ angesehen werden. Der meridionale Impulstransport bewirkt keinen Ausgleich von Gegensätzen, er ist im Gegenteil meistens zum Impulsmaximum hin gerichtet. Trotzdem findet der Gradientansatz auch für die makroturbulenten Transporte immer wieder Anwendung. Mit Erfolg geschieht dies beispielsweise in den sogenannten Energiebilanzmodellen. Da diese sich nur auf den 1. Hauptsatz der Thermodynamik stützen, ist lediglich die Parametrisierung des meridionalen Wärmetransports erforderlich. Dieser ist im wesentlichen gegen den meridionalen Temperaturgradienten gerichtet (Ausnahme: untere Stratosphäre). Da die potentielle Temperatur eine Erhaltungsgröße ist, kann der Wärmetransport durch den Gradientansatz beschrieben werden. Als Beispiel ist hier das Modell von Sellers (1969) zu nennen, das die meridionale Verteilung der Jahresmitteltemperaturen berechnet.

Eine prinzipielle Schwierigkeit bei diesen und auch bei den folgenden Modellen besteht in der Beschaffung des Austauschkoeffizienten. Sellers (1969) erhält ihn aus Beobachtungen, die allerdings lückenhaft sind. Eine andere Möglichkeit besteht darin, einfach auszuprobieren, welcher Koeffizient die besten Ergebnisse liefert. Adem (1962) gewinnt auf diese Weise für jeden Monat einen passenden Austauschkoeffizienten.

Die komplizierteren dynamischen Modelle enthalten auch den meridionalen Impulstransport. Da ein Gradientansatz für den Impulstransport nicht möglich ist, müssen hier andere Wege gefunden werden. Green (1970) hat gezeigt, daß der meridionale Impulstransport durch den Transport quasi-geostrophischer potentieller Vorticity Q ausgedrückt werden kann. Da Q im adiabatischen reibungsfreien Fall eine konservative Größe ist, ist es sinnvoll, für den Transport von Q den Gradientansatz zu benutzen. Sela und Wiin-Nielsen (1971) bedienen sich des Austauschansatzes für Q in ihrem quasi-geostrophischen Zweischichten Modell, das nur Q als Variable enthält. Das Modell berechnet den Jahresgang von Temperatur, Wind und Energien. Die verwendeten Austauschkoeffizienten werden aus Beobachtungen gewonnen (Wiin-Nielsen u. Sela, 1971). Da jedoch unterhalb von 800 mb negative Austauschkoeffizienten auftreten, wird in diesem Bereich ein Gradientansatz für den Transport von Q versagen. Er kann also lediglich in vertikal gering auflösenden Modellen erfolgreich angewandt werden.

Andere Autoren versuchen, den Impulstransport mit der Baroklinität der Atmosphäre in Zusammenhang zu bringen. Williams und Davies (1965) und Dolzhanskiy (1969) machen zum Beispiel den Impulstransport vom meridionalen Temperaturgradienten abhängig. Dahinter steht die Annahme, daß die Transporte von den großräumigen Störungen bewerkstelligt werden, die durch die Instabilität des zonalen Grundstroms entstehen (barokline Entwicklung). Als Maß für die Baroklinität kann der meridionale Temperaturgradient angesehen werden. Es ist jedoch zu bemerken, daß nur ein Teil der meridionalen Transporte durch die Entwicklung barokliner Wellen zustande kommt. Ein großer Teil wird durch die sogenannten stehenden Wellen, deren Ursache die Land-See-Verteilung und die Orographie ist, bewerkstelligt (Oort u. Rasmusson, 1971).

Zusammenfassend kann man sagen, daß alle vorliegenden Konzepte zur Parametrisierung der Makroturbulenz auf physikalischen Annahmen beruhen, die das Problem der turbulenten Transporte nur teilweise erfassen. Der Gradientansatz für die turbulente Diffusion ist letztlich auch für konservative Größen nur eine hypothetische Approximation. Weiterhin kann man trotz physikalischer Begründung einer Parametrisierungsmethode nicht auf die Verwendung empirischer Parameter verzichten. Man ist sogar oftmals gezwungen, aus Mangel an Beobachtungen diese Parameter so auszuwählen, daß die Modelle die erwarteten Ergebnisse liefern.

Wenn nun also keine befriedigende Theorie zur Behandlung der Makroturbulenz existiert, erhebt sich die Frage, ob es nicht mehr erfolgversprechend ist, einen pragmatischen Standpunkt einzunehmen: Unter Verzicht auf ein physikalisches Konzept einer Parametrisierungsmethode wird eine bestimmte funktionale Abhängigkeit zwischen den turbulenten Transporten und dem Grundstrom angenommen. Die noch frei wählbaren Parameter dieser Abhängigkeit sollen dann auf systematische Weise so bestimmt werden, daß das parametrisierte Modell Lösungen liefert, die den erwünschten Lösungen bestmöglich angepaßt sind. Unter den erwünschten Lösungen sei das tatsächlich beobachtete Phänomen zu verstehen, welches das parametrisierte Modell simulieren soll.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines solchen Verfahrens zur Parametrisierung der Makroturbulenz in einem zonal gemittelten Modell. Es soll ein linearer Zusammenhang zwischen den Transportgrößen und dem zonalen Grundstrom hergestellt werden. Die zu bestimmenden Parameter sind die Konstanten dieser linearen Beziehung (Parametrisierungskoeff.). Abweichend vom Gradientansatz werden die Transporte von sämtlichen Variablen des zonalen Grundstroms abhängig ge-

macht. Es kann dann eine weitaus größere Anzahl von Parametern ermittelt werden, die es gestatten, möglichst viele charakteristische Eigenschaften des Zeitverhaltens der erwünschten Lösungen zu reproduzieren. Eine sinnvolle Anwendung eines zonal gemittelten Modells, das das detailliertere Zeitverhalten des zonalen Grundstroms (z.B. kurzzeitige Schwankungen in Intensität und Lage) wiedergibt, wäre in einer Kopplung an ein Ozeanmodell zu sehen. Gerade in letzter Zeit wird die wechselseitige Beeinflussung von Ozean und Atmosphäre unter Berücksichtigung kurzzeitiger "Wetter"-Schwankungen mit wachsendem Interesse studiert (Hasselmann, 1976, Salmon u. Hendershott, 1976).

Es muß noch erwähnt werden, daß die vorliegende Arbeit lediglich auf die Entwicklung der Parametrisierungsmethode abzielt. Der Einfachheit halber soll hier deshalb nicht ein beobachtetes Phänomen der Allgemeinen Zirkulation simuliert werden, sondern die Lösungen eines Modells der Allgemeinen Zirkulation (Zirkulationsmodell). In Kapitel I wird daher zunächst das dreidimensionale Zirkulationsmodell (Vergleichsmodell) vorgestellt. Das zonal gemittelte Modell und die Herleitung der Parametrisierungsmethode wird in Kapitel II beschrieben. Es folgt eine Präsentation der Ergebnisse des zonal gemittelten Modells bei Verwendung konstanter und zeitabhängiger Parametrisierungskoeffizienten (Kapitel III). Rechnungen mit dem herkömmlichen Austauschansatz (Kapitel IV) bieten Vergleichsmöglichkeiten mit der Leistungsfähigkeit der hier entwickelten Parametrisierungsmethode. Im letzten Kapitel werden vergleichende Energiebetrachtungen angestellt.

I. Das dreidimensionale Zirkulationsmodell

1. Physikalische Grundlagen und Modellgleichungen

Zur Entwicklung einer Parametrisierungsmethode für die Makroturbulenz wird es genügen, ein physikalisch sehr einfaches Modell der Allgemeinen Zirkulation zu verwenden. Als geeignet erscheint hier ein Modell, das Lorenz (1960) erstellt hat. Es dient vornehmlich zur Simulation von Laborversuchen, die zum Studium der Allgemeinen Zirkulation durchgeführt wurden (Hide, 1953, Fultz et.al., 1959). Bei diesen Experimenten handelt es sich um mit Flüssigkeit gefüllte rotierende Ringe, die außen (niedere Breiten) beheizt und innen (hohe Breiten) abgekühlt werden. Es hat sich erwiesen, daß diese Versuche ein halbwegs realistisches Bild der atmosphärischen Zirkulation wiederzugeben vermögen. Die modellmäßige Beschreibung der Experimente basiert auf der Annahme quasi-geostrophischer Strömungen. Das prognostische Gleichungssystem besteht aus der quasi-geostrophischen Vorticitygleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = -\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi + f) - \nabla \cdot (f \nabla \chi) \quad (\text{I.1a})$$

und der thermodynamischen Gleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathcal{J}(\psi, \theta) - \nabla \cdot (\theta \nabla \chi) - \frac{\partial}{\partial p} (\omega \theta) \quad (\text{I.1b})$$

Das System (I. 1a,b) ist in dieser Form energieerhaltend (Lorenz, 1960). Die prognostischen Variablen sind die Stromfunktion ψ und die potentielle Temperatur θ . Das Geschwindigkeitspotential χ ist mit der generalisierten Vertikalgeschwindigkeit $\omega = \frac{dp}{dt}$ über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla^2 \chi = -\frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (\text{I.1c})$$

verknüpft.

Die Schließung des Systems (I.1) erfolgt durch die thermische Windbeziehung

$$\frac{\partial}{\partial p} (\nabla^2 \psi) = - \frac{R}{p f} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \nabla^2 \theta \quad (I.2)$$

die im geostrophischen Modell den Zusammenhang zwischen der vertikalen Windscherung und dem horizontalen Temperaturgradienten beschreibt. Es bedeuten hier

- R = Gaskonstante für trockene Luft
- c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck
- p_0 = Bodendruck
- f = Coriolisparameter

Das einfachste barokline Modell besteht aus nur zwei Schichten. Zur vertikalen Diskretisierung der Modellgleichungen (I.1) werden sie beide jeweils für die obere und untere Schicht angesetzt. Die Stromfunktion für den divergenzfreien Windanteil sei in der oberen bzw. unteren Schicht mit $\psi + \tau$ bzw. $\psi - \tau$, die potentielle Temperatur mit $\theta + \sigma$ bzw. $\theta - \sigma$ bezeichnet und das Geschwindigkeitspotential mit $-\hat{\chi}$ bzw. $+\hat{\chi}$ angesetzt. Es bedeuten hier ψ die Stromfunktion des vertikal gemittelten Windes, θ das vertikale Mittel der potentiellen Temperatur. Das Geschwindigkeitspotential ist so gewählt, daß eine Divergenz in der einen Schicht einer Konvergenz in der anderen Schicht entspricht. τ ist die Stromfunktion für den vertikalen Scherwind, σ ein Maß für die statische Stabilität, die in diesem Modell konstant gehalten wird (σ_0). Durch diese Maßnahme wird das Modell sicherlich barokline Entwicklungen überschätzen. Dies wird jedoch in Kauf genommen, weil dadurch andererseits eine Verringerung des Rechenaufwands erreicht wird. Die generalisierte Vertikalgeschwindigkeit ω soll am Boden und am oberen Rand der Modellatmosphäre verschwinden.

Mit der für die Laborexperimente sinnvollen Annahme eines konstanten Coriolisparameters $f = f_0$ folgen die vertikal diskretisierten

Modellgleichungen für die Variablen ψ , τ und θ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = -\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) - \mathcal{J}(\tau, \nabla^2 \tau) \quad (\text{I.3a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \tau) = -\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \tau) - \mathcal{J}(\tau, \nabla^2 \psi) + f_0 \nabla^2 \hat{\chi} \quad (\text{I.3b})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathcal{J}(\psi, \theta) + \zeta_0 \nabla^2 \hat{\chi} \quad (\text{I.3c})$$

und die thermische Windbeziehung

$$\nabla^2 \theta = B \nabla^2 \tau \quad (\text{I.4})$$

wobei
$$B = \frac{2f_0}{R} \left(\frac{p_0}{p_2} \right) \frac{R}{c_p} \quad (\text{I.5})$$

mit p_2 = Druck an der Grenzfläche beider Schichten. Durch die Gleichungen (I.3) u. (I.4) werden nur adiabatische Prozesse beschrieben. Sie gelten für ein energetisch abgeschlossenes System.

Für Rechnungen, die auf eventuelle Änderungen der Allgemeinen Zirkulation aufgrund geänderter Zwangsfunktionen abzielen, kann selbstverständlich auf nichtadiabatische und irreversible Prozesse nicht verzichtet werden. Eine sehr einfache diabatische Wärmequelle sei gegeben durch eine Erwärmung proportional zur Differenz der potentiellen Temperatur θ und einer vorgegebenen potentiellen Temperatur θ^* . Die Dissipation erfolgt durch Bodenreibung und innere Reibung. Die Reibungskraft wird proportional zur Geschwindigkeit in der unteren Schicht, bzw. zur Geschwindigkeitsdifferenz beider Schichten angesetzt. Die Vorticitygleichung für die mittlere Strömung und für die vertikale Scherströmung und die thermodynamische Gleichung lauten dann unter Hinzunahme diabatischer und dissipativer Terme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = -\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) - \mathcal{J}(\tau, \nabla^2 \tau) - k(\nabla^2 \psi - \nabla^2 \tau) \quad (\text{I.6a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \tau) = -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi) + f_0 \nabla^2 \hat{\chi} - 2k' \nabla^2 \tau + k(\nabla^2 \psi - \nabla^2 \tau) \quad (\text{I.6b})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -J(\psi, \theta) + G_0 \nabla^2 \hat{\chi} - h(\theta - \theta^*) \quad (\text{I.6c})$$

k' und $2k$ sind die Koeffizienten der inneren Reibung und der Bodenreibung, $2h$ der Proportionalitätsfaktor für die Erwärmung. Gleichung (I.4) erlaubt die Zusammenfassung der Gleichungen (I.6b) und (I.6c) zu einer prognostischen Gleichung durch Elimination von $\nabla^2 \hat{\chi}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B} \nabla^2 - \frac{f_0}{G_0} \right) \theta = -\frac{1}{B} J(\psi, \nabla^2 \theta) - \frac{1}{B} J(\theta, \nabla^2 \psi) - \frac{f_0}{G_0} J(\psi, \theta) + \frac{f_0 h}{G_0} (\theta - \theta^*) + k \nabla^2 \psi - (k - 2k') \frac{1}{B} \nabla^2 \theta \quad (\text{I.7a})$$

Führt man die thermischen Windbeziehung auch in (I.6a) ein, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = -J(\psi, \nabla^2 \psi) - \frac{1}{B^2} J(\theta, \nabla^2 \theta) - k(\nabla^2 \psi - \frac{1}{B} \nabla^2 \theta) \quad (\text{I.7b})$$

Mit (I.7) sind nun die Modellgleichungen des 2-Schichtenmodells bereitgestellt. Der Unterschied zum Modell von Lorenz (1962, 1963b) liegt nur darin, daß hier die statische Stabilität konstant gehalten wird. Das gleiche Modell verwendet Fleming (1971) für seine stochastischen Vorhersagen.

2. Spektrale Darstellung der Modellgleichungen

Zur horizontalen Diskretisierung der Modellgleichungen (I.7) soll von der Spektralmethode Gebrauch gemacht werden. Die Variablen werden in Reihen von Orthogonalfunktionen entwickelt. Lorenz (1963b) wählte hierfür Doppelfourierreihen, die hier auch verwendet werden. Das Integrationsgebiet sei ein unendlicher Kanal der

Breite πL mit festen Wänden bei $y = 0$ und $y = \pi L$. In x -Richtung sei die Strömung periodisch mit der Grundwellenlänge $2\pi L$, wobei die Achsen der horizontalen Koordinaten x und y nach Osten bzw. nach Norden weisen. Ein für dieses Gebiet passender Satz von Orthogonalfunktionen ϕ_i ($i = 1, 2, \dots$), für die die Orthogonalitätsrelationen

$$\overline{\phi_i \phi_j}^{xy} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (I.8)$$

gelten, ist:

$$\begin{aligned} F_{0m} &= \sqrt{2} \cos \frac{my}{L} \\ G_{nm} &= 2 \sin \frac{my}{L} \cos \frac{nx}{L} \\ H_{nm} &= 2 \sin \frac{my}{L} \sin \frac{nx}{L} \end{aligned} \quad (I.9)$$

Die m und n sind ganze Zahlen, m die Wellenzahl in y -Richtung, n die Wellenzahl in x -Richtung. Eine Variable W soll nun durch die endliche Doppelfourierreihe angenähert werden:

$$W = \sum_{m=1}^M W_m^F F_{0m} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (W_{nm}^G G_{nm} + W_{nm}^H H_{nm}) \quad (I.10)$$

Die maximalen Wellenzahlen M und N sind gleichzeitig jeweils die Anzahl der Wellen, die das Modell berücksichtigt (Maß für das spektrale Auflösungsvermögen). Die W_m^F , W_{nm}^G und W_{nm}^H sind die spektralen Amplituden von W , die neuen Variablen im spektralen Modell. Im folgenden werden die W_m^F als Grundströmungsamplituden bezeichnet, da sie die nur von y abhängigen Glieder der Reihe und damit ein Maß für die zonale Grundströmung sind. Die Amplituden W_{nm}^G und W_{nm}^H der auch von x abhängigen Glieder sind demnach die spektralen Amplituden der Störungen, wobei als Störung jede Abweichung vom zonalen Grundstrom zu verstehen ist.

Es erscheint sinnvoll, die beiden Störungsanteile gleicher Wellenzahlen m und n zusammenzufassen. Die Glieder unter der Doppelsumme

in Gleichung (I.10) lassen sich schreiben:

$$2 \sin \frac{m\eta}{L} \left[W_{nm}^G \cos \frac{n\pi}{L} + W_{nm}^H \sin \frac{n\pi}{L} \right] = \quad (I.11)$$

$$2 \sin \frac{m\eta}{L} \cdot W_{nm}^S \cos \left(\frac{n\pi}{L} - \varphi \right)$$

mit der Störungsamplitude

$$W_{nm}^S = \sqrt{(W_{nm}^G)^2 + (W_{nm}^H)^2}$$

und der Phase

$$\varphi = \arctan \left(\frac{W_{nm}^H}{W_{nm}^G} \right)$$

Aus (I.9) folgt

$$\nabla^2 \phi_i = - \frac{a_i^2}{L^2} \phi_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (I.12)$$

mit $a_i^2 = m^2 + n^2$. Der Index i zählt die verschiedenen Orthogonalfunktionen auf, in folgender Reihenfolge:

F_{0m}, G_{nm}, H_{nm} . Es ist also für

$$\left. \begin{array}{l} i \leq M: \phi_i = F_{0i} \\ M < i \leq M+MN: \phi_i = G_{nm} \\ M+MN < i \leq M+2MN: \phi_i = H_{nm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n = 1, \dots, N \\ m = 1, \dots, M \end{array}$$

Also ist die Anzahl der im Modell verwendeten Orthogonalfunktionen $I = M+2MN$. Der Jacobi-Operator zweier Orthogonalfunktionen ergibt sich zu:

$$\mathcal{J}(\phi_j, \phi_k) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^I c_{ijk} \phi_i, \quad j, k = 1, \dots, I \quad (I.13)$$

mit den Wechselwirkungskoeffizienten

$$c_{ijk} = L^2 \phi_i \mathcal{J}(\phi_j, \phi_k) \quad (I.14)$$

Die c_{ijk} sind ein Maß für die nichtlineare Wechselwirkung zwischen Wellen, die durch die Orthogonalfunktionen ϕ_i, ϕ_j und ϕ_k gegeben sind. Bei Beachtung von (I.8) zeigt es sich, daß

nur folgende Tripel von Typen von Orthogonalfunktionen: FGH, GGH und HHH auf von Null verschiedene c_{ijk} führen. Wechselwirkungen mit der Grundströmung (F) treten also nur unter Zusammenwirkung beider Störungstypen (G und H) auf und auch nur dann, wenn diese in ihrer Wellenzahl n übereinstimmen. Als Bedingungen für die Wechselwirkungen zwischen den Störungen ergeben sich, daß die Summe der Wellenzahlen n_i, n_j, n_k und die Summe der m_i, m_j, m_k jeweils eine gerade Zahl sein muß. Diese Bedingungen lassen sich leicht ableiten, wenn (I.14) auf die Orthogonalfunktionen (I.9) angewandt wird.

Mit der Entwicklung der Variablen (τ wird in Kapitel IV benötigt) und der vorgegebenen Temperatur θ^* in folgende endliche Reihen

$$\begin{aligned}\psi &= L^2 f_0 \sum_{i=1}^I \psi_i \phi_i \\ \tau &= L^2 f_0 \sum_{i=1}^I \tau_i \phi_i \\ \theta &= B L^2 f_0 \sum_{i=1}^I \theta_i \phi_i \\ \theta^* &= B L^2 f_0 \sum_{i=1}^I \theta_i^* \phi_i\end{aligned}\tag{I.15}$$

- wodurch die spektralen Amplituden ψ_i, τ_i, θ_i und θ_i^* gleichzeitig dimensionslos gemacht werden - und nach Einführung dimensionsloser Konstanten

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{B L^2 f_0} \sigma_0 \\ h_0 &= \frac{1}{f_0} h \\ k_0 &= \frac{1}{f_0} k \\ k'_0 &= \frac{1}{f_0} k'\end{aligned}\tag{I.16}$$

folgen aus (I.7) die spektralen Modellgleichungen

$$\dot{\psi}_i = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[a_i^{-2} (a_i^2 - a_k^2) c_{ijk} (\psi_j \psi_k + \theta_j \theta_k) \right] - k_0 (\psi_i - \theta_i) \tag{I.17a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \leq k}}^I \left[c_{ijk} \frac{\overline{\sigma}_{00} (a_j^2 - a_k^2) + 1}{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 + 1} \theta_j \psi_k + c_{ijk} \frac{\overline{\sigma}_{00} (a_j^2 - a_k^2) - 1}{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 + 1} \psi_j \theta_k \right] + \\ & + \frac{k_0 \overline{\sigma}_{00} a_i^2}{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 + 1} \psi_i - \frac{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 (k_0 + 2k_0') + h_0}{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 + 1} \theta_i + \frac{h_0}{\overline{\sigma}_{00} a_i^2 + 1} \theta_i^* \end{aligned} \quad (\text{I.17b})$$

wobei $(\dot{}) = \frac{d}{dt_0}() \equiv \frac{1}{t_0} \frac{d}{dt}()$ die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit t_0 bedeutet.

Die nichtlinearen Terme (eckige Klammern) in (I.17) sind hervorgegangen aus den Advektionstermen $\nabla(\psi, \nabla^2 \psi)$ und $\nabla(\tau, \nabla^2 \tau)$ in (I.6a) und aus $\nabla(\psi, \nabla^2 \tau)$, $\nabla(\tau, \nabla^2 \psi)$ und $\nabla(\psi, \theta)$ in (I.6b,c). Sie beschreiben die Divergenz des makroturbulenten Wärme- und Impulstransportes; sie sollen im zonal gemittelten Modell durch einen linearen Parametrisierungsansatz ersetzt werden. Alle übrigen Terme der rechten Seiten beinhalten die Dissipation durch Reibung und die diabatische Wärmequelle.

3. Numerisches Lösungsverfahren

Die Modellgleichungen (I.17) sind nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, die nur durch ein numerisches Verfahren integriert werden können. Es sind also die Zeitableitungen durch Differenzenapproximationen zu ersetzen. Ein bewährtes Schema besteht aus einem doppelten Vorwärtsschritt und anschließender Mittelung (Lorenz, 1963a): Die Variable W sei zum Zeitpunkt $t_\mu = \mu \Delta t$ bekannt: W_μ . Die ganze Zahl μ zähle die Zeitschritte Δt . Der 1. Vorwärtsschritt berechnet die Hilfsgröße $W_{\mu+1}^*$ zur Zeit $t_{\mu+1} = (\mu+1) \Delta t$. Mit der Bezeichnung RS_μ = rechte Seite der Differentialgleichung zur Zeit t_μ ist

$$W_{\mu+1}^* = W_\mu + \Delta t \cdot RS_\mu$$

Der 2. Vorwärtsschritt ergibt eine Hilfsgröße zur Zeit $t_{\mu+2}$

$$W_{\mu+2}^* = W_{\mu+1}^* + \Delta t \cdot RS_{\mu+1}^*.$$

Nach Mittelung der Variablen W_μ und $W_{\mu+2}^*$ folgt der endgültige

Wert von W_{n+1} :

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} (W_n + W_{n+2}^*)$$

oder

$$W_{n+1} = W_n + \frac{\Delta t}{2} (RS_n + RS_{n+1}^*)$$

Diese Methode wird als Heun Schema bezeichnet (Young, 1968). Für die folgenden Rechnungen mit den nichtlinearen Gleichungen erweist sich ein Zeitschritt $\Delta t = 6$ Stunden ($\Delta t_0 = f_0 \Delta t = 2,16$) als genügend klein. Ausgenommen davon ist der Zeitlauf mit hoher spektraler Auflösung ($M = 6$, $N = 6$). Hier wird aus Stabilitätsgründen ein Zeitschritt von 2 Stunden verwandt.

4. Lösungen mit verschiedenen Zwangsfunktionen und unterschiedlicher spektraler Auflösung

Das nichtlineare 2-Schichtenmodell ist in der Lage, in Abhängigkeit von den steuernden Parametern (Reibungskoeffizienten k_0 und k_1 , Erwärmungskoeffizient h_0 , statische Stabilität σ_0 , vorgegebene Temperatur θ_0^*) unterschiedliche Zirkulationstypen zu simulieren, die in den Laborversuchen zur Allgemeinen Zirkulation beobachtet wurden (Hide, 1953, Fultz, 1959). Lorenz (1963b) klassifizierte die Zirkulationstypen folgendermaßen: Eine stationäre Zirkulation ohne Variation in x-Richtung wird Hadleyzirkulation genannt. Bei einer spektralen Darstellung der Variablen heißt das, daß die Grundströmungsamplituden W_m^F konstant sind und die Störungsamplituden W_{nm}^S verschwinden (vgl. Kapitel I.2). Treten Störungen der Strömung in x-Richtung auf, so handelt es sich um eine Rossbyzirkulation. Diese kann in 3 weitere Typen unterteilt werden.

- a) stationäre Rossbyzirkulation (W_m^F, W_{nm}^S konstant)
- b) periodisch sich ändernde Rossbyzirkulation = Vacillation (W_m^F, W_{nm}^S unterliegen periodischen Schwankungen)
- c) irreguläre Zirkulation (W_m^F, W_{nm}^S unterliegen nichtperiodischen Schwankungen).

Die Zirkulationsform, die in der Atmosphäre vorgefunden wird, ist sicherlich unter c) einzuordnen. Da das vorliegende Modell in der

Lage sein soll, wenigstens das typische Verhalten der Atmosphäre zu simulieren, stellt sich die Aufgabe, die oben genannten Parameter so zu wählen, daß als Lösungen der Modellgleichungen eine irreguläre Zirkulation erhalten wird. In seiner Arbeit über Vorhersagbarkeit findet Lorenz (1965) nichtperiodische Lösungen mit den Parametern

$$h_0 = k_0 = 2 \text{ } k'_0 = 20/128, \overline{G}_{00} = 5/128, \theta_1^* = 12/128.$$

Fleming (1971) benutzt die Werte

$$h_0 = k_0 = 2 \text{ } k'_0 = 15/128, \overline{G}_{00} = 5/128, \theta_1^* = 9/128.$$

Diese Werte werden hier übernommen. Ist $\theta_1^* > \theta_1$, bedeutet das eine Erwärmung in der südlichen Hälfte des Kanals und gleichzeitig eine Abkühlung in der nördlichen Hälfte des Kanals. Die übrigen spektralen Amplituden von θ^* sollen verschwinden. $\theta_i^* = 0$ für $i = 2, \dots, I$ bedeutet aber keinesfalls, daß in diesem spektralen Bereich auch keine Wärmequellen und -senken vorhanden sind, da $\theta_i^* - \theta_i \neq 0$ für $i = 2, \dots, I$. Auf die Bedeutung dieser Quellen und Senken wird im Kapitel V noch eingegangen.

Es zeigt sich nun, daß die Lage der einzelnen Zirkulationstypen im Parameterraum von der spektralen Auflösung, also von M und N abhängt. Die Abbildung 1 zeigt einen Vergleich für unterschiedliche Auflösungen (M, N). Die Parameter h_0, k_0, k'_0 und $\overline{G}_{00}$ sind hier konstant gehalten, nur θ_1^* variiert, um die Bereiche der Zirkulationstypen zu ermitteln. Bei einer Auflösung (2,2) erhält man mit wachsender thermischer Zwangsfunktion θ_1^* nacheinander folgende Zirkulationstypen: Hadleyzirkulation, stationäre Rossbyzirkulation der Wellenzahlen $m = 1, n = 2$, stationäre Rossbyzirkulation ($m = 1, 2; n = 2$), Vacillation- ($m = 1, 2; n = 2$), stationäre Rossbyzirkulation ($m = 2, n = 2$). Eine ähnliche Reihenfolge der Zirkulationsformen erhält Lorenz (1963b). Doch ist ein direkter Vergleich mit seinen Ergebnissen nicht möglich, da er in dieser Arbeit die statische Stabilität als Variable mitführt und in x -Richtung nur mit einer Welle auflöst. Zum Beispiel findet Lorenz in der θ_1^*, k_0 -Ebene auch einen Bereich mit nichtperiodischen Lösungen. Dies ist vermutlich eine Folge der variablen

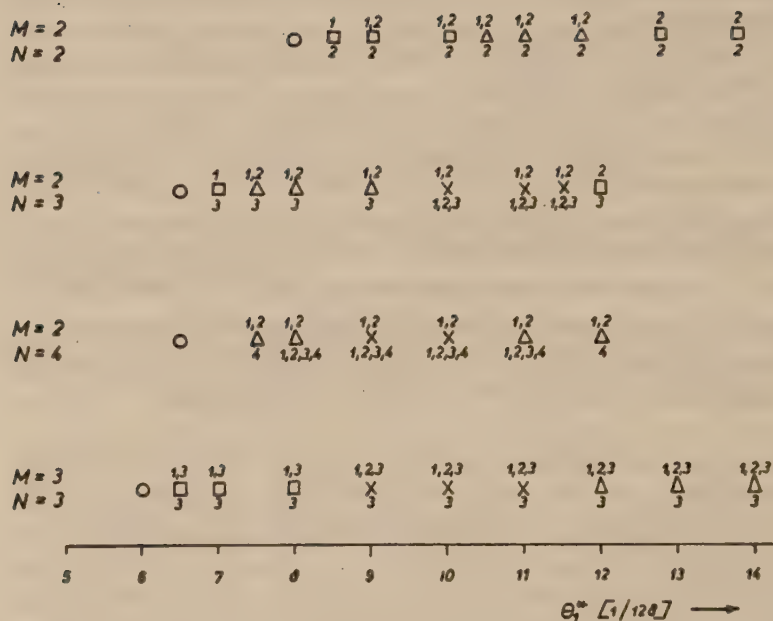


Abb. 1: Auftreten verschiedener Zirkulationstypen in Abhängigkeit von θ_1^* bei unterschiedlicher spektraler Auflösung. Symbolik: $\circ$ Hadleyzirkulation, $\square$ stationäre Rossbyzirkulation, $\triangle$ Vacillation, $\times$ irreguläre Zirkulation, wobei m, n = Wellenzahlen der nichtverschwindenden Grundstrom- bzw. Störungssamplituden

statischen Stabilität, da irreguläre Zirkulationsformen erst ab einer gewissen Anzahl von Freiheitsgraden des Modells (=Anzahl von Modellvariablen) auftreten. Um auch mit konstanter statischer

Stabilität (also Verringerung der Freiheitsgrade) nichtperiodische Lösungen zu erhalten, muß eine höhere Auflösung für eine größere Anzahl von Modellvariablen sorgen. Mit der Auflösung (2,3) tritt der irreguläre Fall erstmals in Erscheinung (vgl. Lorenz, 1965). Die Bereiche der Zirkulationstypen verschieben sich jetzt zu kleineren thermischen Zwangsfunktionen hin. Beim Vacillation-Fall sowie bei der stationären Rossbyzirkulation erscheinen ebenso wie bei der Auflösung (2,2) nur die kürzesten Wellenlängen in x-Richtung. Hingegen sind bei der irregulären Zirkulation alle Störungsamplituden von Null verschieden. Die Hinzunahme einer weiteren Welle in x-Richtung führt zu einer Erweiterung des Bereichs der irregulären Zirkulation. Eine stationäre Rossbyzirkulation wird nun nicht mehr gefunden, und es zeigt sich ein Bereich von Vacillation, bei dem sämtliche Störungsamplituden auftreten. Werden beide Richtungen durch 3 Wellen aufgelöst (3,3), so findet man der Reihe nach Hadleyzirkulation, stationäre Rossbyzirkulation, irreguläre Zirkulation, Vacillation. Weitere Rechnungen mit höherer Auflösung (6,6) ergeben für $\Theta_1^* = 10/128$ irreguläre Lösungen, bei denen sämtliche Störungsamplituden von Null verschieden sind.

In Übereinstimmung mit Stabilitätsuntersuchungen von Metz (1976) zeigt sich in Abb. 1, daß beim Übergang von der Hadleyzirkulation in die Rossbyzirkulation die Welle mit der Wellenzahl $n = 3$ als erste erscheint, sich also als die instabilste erweist. Zwar berechnete Metz die Stabilitätsgrenzkurven für ein kleineres σ als in dieser Arbeit angenommen wird, doch ist die Abhängigkeit der instabilsten Wellenlänge von σ in diesem Bereich (Metz: $\sigma_{\infty} = 0,0277$, hier: $\sigma_{\infty} = 0,0391$) nur sehr schwach, so daß der Vergleich sinnvoll erscheint.

Die Bestimmung eines Zirkulationstyps ist oft nicht eindeutig: Es gibt Fälle, bei denen sich stationäre Rossbyzirkulation und Vacillation in einem gewissen Zeitrhythmus einander ablösen. Je größer die Frequenz dieses Rhythmus' ist, um so mehr ähnelt ein

solcher Wechsel der Zirkulationstypen einer irregulären Zirkulationsform. Die bei der Auflösung (2,3) auftretenden irregulären Fälle sind dieser Art. Eine klare Unterscheidung der Zirkulationstypen ist für $M = 2$, $N = 4$ möglich. Da hier außerdem im irregulären Bereich Wechselwirkungen aller vorhandenen Wellen existieren, was den realen atmosphärischen Verhältnissen am nächsten kommt, wird in dieser Arbeit hauptsächlich mit der Auflösung (2,4) gerechnet. Modellrechnungen mit höherer Auflösung werden wegen des hohen Rechenaufwandes nur in wenigen Fällen durchgeführt.

Als Anfangsbedingung wird für jeden Zeitlauf eine Hadleyzirkulation angenommen, überlagert von kleinen Störungen aller vorhandenen Wellenzahlen m und n . Die Hadleylösung kann analytisch aus (I.17) gewonnen werden: Mit der Annahme, daß alle Störungsamplituden verschwinden: $\psi_i = \theta_i = 0$ für $1 \leq M$ und daß der zonale Grundstrom konstant ist: $\psi_i = \dot{\theta}_i = 0$ für $i \leq M$ folgt aus (I.17)

$$\psi_i = \theta_i$$

$$\theta_i = \frac{h_0 \theta_i^*}{h_0 + 2 k_0' \sigma_0 \alpha_i^2} \quad i \leq M$$

Mit der speziellen Wahl der Parameter $h_0 = 2 k_0'$ und $\theta_i^* = 0$ für $i > 1$ wird daraus

$$\psi_1 = \theta_1$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_1^*}{1 + \sigma_0} \quad (I.18)$$

$$\psi_i = \theta_i = 0 \quad \text{für } i > 1$$

Die der Hadleyzirkulation am Anfang überlagerten kleinen Störungen werden mit $\psi_i = \theta_i = q_1 \psi_1$, $i > 1$ angesetzt.

Die Abb.2 zeigt der Reihe nach einen Fall von Vacillation und 2 irreguläre Fälle für jeweils konstante äußere Parameter mit

der Auflösung (2,4). Dargestellt ist der Zeitverlauf der spektralen Grundstromamplituden von ψ und θ .

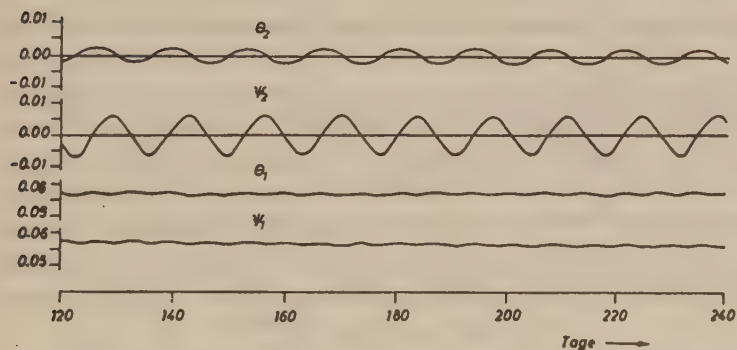
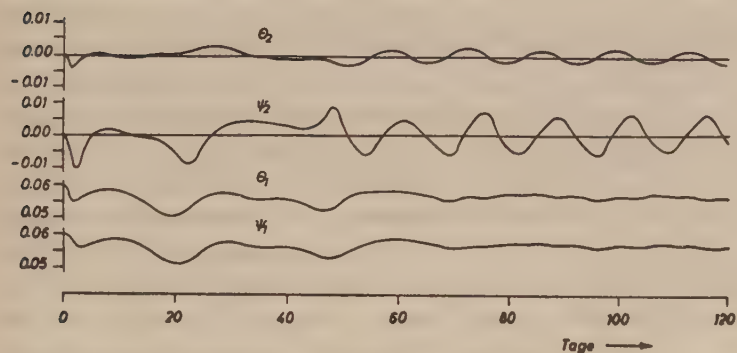


Abb.2a: Grundstromamplituden ψ_i, θ_i in relativen Einheiten.
 $M = 2, N = 4, \quad \Theta_1^* = 8/128$: Vacillation.

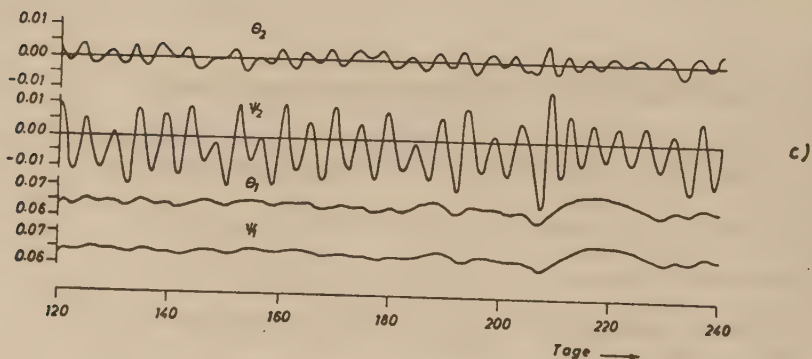
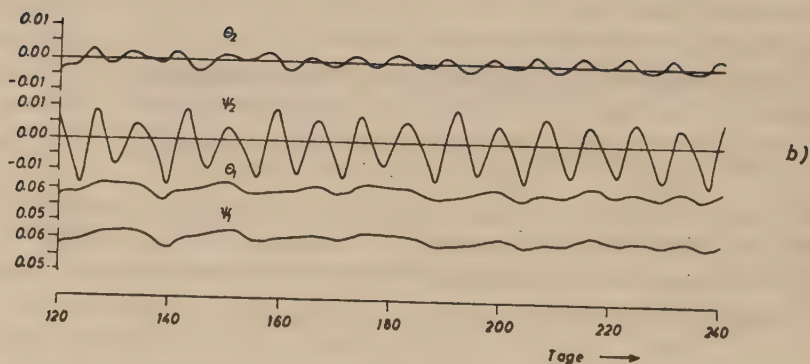


Abb. 2b,c; Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$

$\Theta_1^* = 9/128$: irreguläre Zirkulation (b),
 $\Theta_1^* = 10/128$: irreguläre Zirkulation (c)

Mit $\Theta_1^* = 8/128$ (Abb. 2a) entwickelt sich aus der zu Beginn gestörten Hadleyzirkulation nach etwa 70 Tagen eine Zirkulationsform, die durch streng periodische Schwankungen gekenn-

zeichnet ist. Ein stärkerer Antrieb der Modellatmosphäre ($\Theta_1^* = 9/128$ in Abb. 2 b und $\Theta_1^* = 10/128$ in Abb. 2c) liefert nichtperiodische Schwankungen des Grundstroms. Dargestellt ist der Zeitraum vom 120. Tag bis zum 240. Tag, in dem sich das für die jeweilige thermische Zwangsfunktion charakteristische Zeitverhalten der Grundströmung bereits eingestellt hat. Das charakteristische Verhalten ist gekennzeichnet durch kurzzeitige Schwankungen des Grundstroms mit bestimmten dominierenden Frequenzen und Amplituden. Eine etwa 8-tägige Periode in Abb. 2 b und eine 4,5-tägige Periode in Abb. 2 c sind besonders ausgeprägt. Die Grundstromamplituden oszillieren um zeitliche Mittelwerte $\overline{\psi_i}$ und $\overline{\theta_i}$, die für ein bestimmtes Θ_1^* charakteristische Werte annehmen (z.B für $\Theta_1^* = 9/128$: $\overline{\psi_1} = 0,061$, für $\Theta_1^* = 10/128$: $\overline{\psi_1} = 0,064$). Auch längere Zeitrechnungen zeigen keine Änderung dieser charakteristischen Merkmale.

Die Kurzzeitschwankungen der Grundstromamplituden ψ_1, θ_1 können als Indexzyklus gedeutet werden: Perioden mit starkem zonalen Grundstrom und Perioden mit schwächerem Grundstrom (dafür aber stärker entwickelte barokline Wellen) wechseln einander ab. Besonders ausgeprägt sind die Kurzzeitschwankungen bei der Grundstromamplitude mit der Wellenzahl $m = 2$. Der mit diesen Schwankungen verbundene Vorzeichenwechsel von ψ_2 bedeutet einen Wechsel der Lage des zonalen Windmaximums: Für $\psi_2 > 0$ folgt wegen $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ (divergenzfreie Windapproximation) und

$$-\frac{\partial F_{02}}{\partial y} = 2\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{L} y > 0$$

eine Verlagerung des Windmaximums in die südliche Kanalhälfte, für $\psi_2 < 0$ eine entsprechende Verlagerung in die nördliche Kanalhälfte.

Zuletzt zeigt Abb. 2d den Zeitverlauf für ein zeitabhängiges und zwar wird

$$\Theta_1^* = \overline{\Theta_1^*} + \Theta_1^{*c} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (I.19)$$

gewählt, wobei $\bar{\Theta}_1^* = 9/128$, $\Theta_1^{*s} = 1/128$, $T = 120$ Tage und $t = \mu \Delta t$ ist. Es zeigt sich, daß das System sehr rasch auf die sich ändernde Zwangsfunktion reagiert. Mit wachsendem Θ_1^* wird ein Anwachsen der Mittelwerte und der vorherrschenden Frequenzen und Amplituden beobachtet und mit abnehmendem Θ_1^* eine Abnahme der Mittelwerte, Frequenzen und Amplituden. Eine höhere thermische Zwangsfunktion bedeutet größere differentielle Erwärmung (Nord-Süd Differenz) und umgekehrt. Betrachtet man den Jahreszyklus der Allgemeinen Zirkulation, so findet man den stärkeren Antrieb der Atmosphäre durch Strahlungsunterschiede (entspricht größerem Θ_1^*) im Winterhalbjahr, den schwächeren Antrieb im Sommerhalbjahr. Der ersten Hälfte des gezeigten Zeitabschnitts in Abb. 2d wäre also dem "Winter", die zweite Hälfte dem "Sommer" zuzuordnen. Die Variablen ψ_1 und Θ_1 reagieren auf die sich ändernde Zwangsfunktion vernünftig: im "Winter" sind sie größer als im "Sommer", d.h., das meridionale Temperaturgefälle und auch der zonale Grundstrom sind im Winter stärker ausgeprägt als im Sommer. Das entspricht den Beobachtungen.

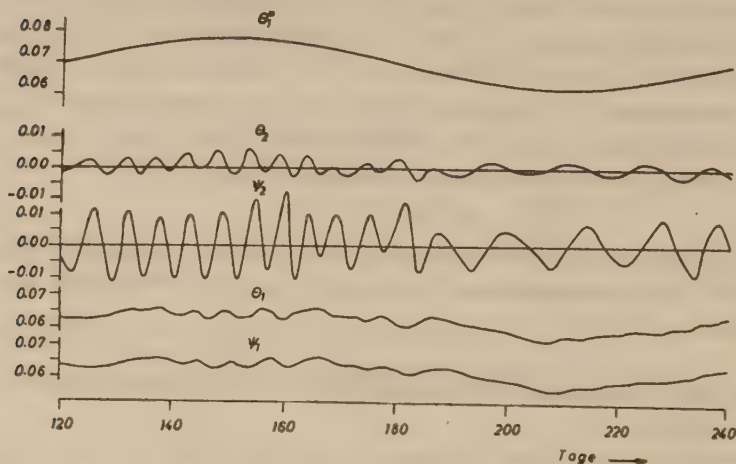


Abb. 2 d,: Grundstromamplituden $M = 2$, $N = 4$,
 Θ_1^* nach Gl.(I.19) mit $\bar{\Theta}_1^* = 9/128$, $\Theta_1^{*s} = 1/128$

Abb. 3 zeigt das Zeitverhalten der Grundstromamplituden bei hoher Auflösung (6,6). Im ersten Fall (Abb. 3a) ist $\bar{\Theta}_n^* = 10/128$, also konstant gehalten, im zweiten Fall (Abb. 3b) variiert $\bar{\Theta}_n^*$ wie in (I.19) angegeben, aber mit $\bar{\Theta}_n^* = 10/128$. Im Vergleich zu den Lösungen bei niedriger Auflösung treten hier mehrere dominierende Frequenzen auf, durch deren Überlagerung die irreguläre Zirkulationsform deutlicher in Erscheinung tritt. (Die ersten 20 Tage - es ist die Einstellzeit bis zu dem für die gewählten Parameter typischen Zeitverhalten - sind nicht dargestellt.) Man erkennt wieder eine der Zwangsfunktion folgende Änderung des charakteristischen Zeitverhaltens (Abb.3b).

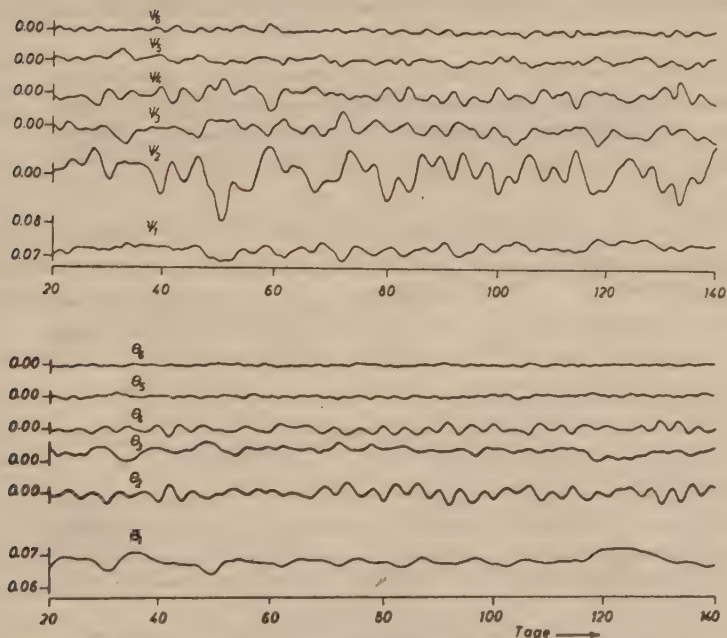


Abb.3a: Grundstromamplituden, $M = 6$, $N = 6$, $\bar{\Theta}_n^* = 10/128$, relative Einheiten

Aus Abb. 3a geht hervor, daß bis auf $\overline{\psi}_1, \overline{\theta}_1$ und $\overline{\theta}_2$ alle anderen Mittelwerte $\overline{\psi}_i \approx \overline{\theta}_i \approx 0$ sind. Das zonale Windprofil ist also im Zeitmittel im wesentlichen durch die Wellenzahlen $m = 1$ und $m = 3$ gekennzeichnet. Die Abb. 4 zeigt die zeitlich gemittelten Windgeschwindigkeiten in der oberen Schicht $\overline{u}_o$ und in der unteren Schicht $\overline{u}_u$. Sie lassen sich

$$\overline{u}_o = - \sum_{i=1}^M (\overline{\psi}_i + \overline{\theta}_i) \frac{\partial F_{0i}}{\partial y}, \quad \overline{u}_u = - \sum_{i=1}^M (\overline{\psi}_i - \overline{\theta}_i) \frac{\partial F_{0i}}{\partial y} \quad (I.20)$$

berechnen. Dem Profil liegen die Daten des Zeitlaufs aus Abb.3a zugrunde. Die Ostwinde in der untereren Schicht im nördlichen und südlichen Drittel des Kanals sowie der Westwind im mittleren Drittel geben Hinweise auf die Dreizellenstruktur der Atmosphäre.

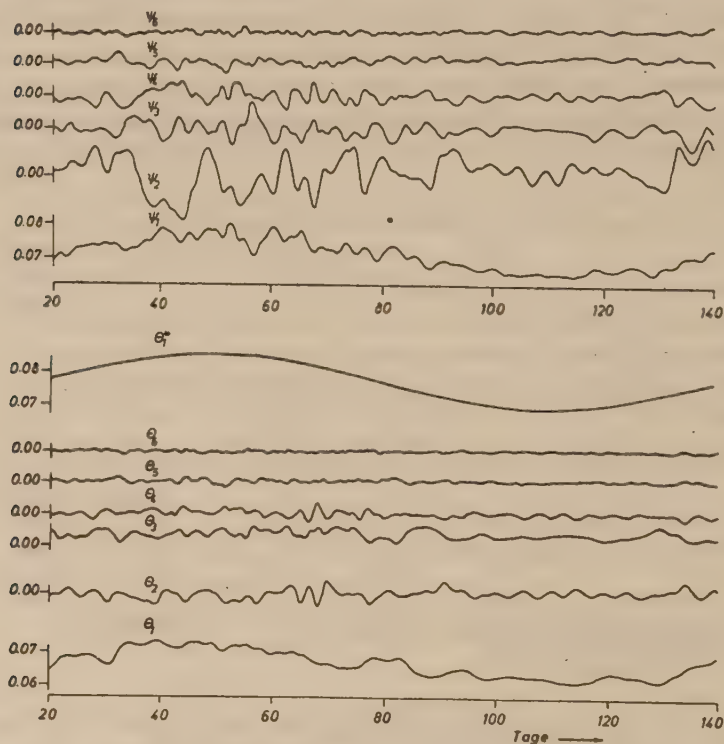


Abb. 3b: Grundstromamplituden, $M = 6$, $N = 6$, θ_i^* nach Gl. (I.19) mit $\overline{\theta}_1^* = 10/128$, $\overline{\theta}_3^* = 1/128$, relative Einheiten

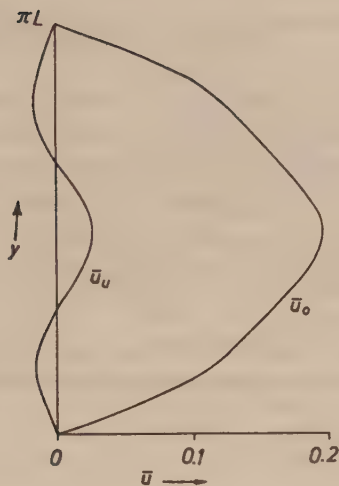


Abb. 4: Zeitlich gemittelte zonale Windprofile beider Schichten, berechnet aus dem Zeitlauf Abb. 3a, relative Einheiten

Zuletzt sei noch ein Momentanbild der Strömungen in beiden Schichten gezeigt, und zwar am 60. Tag des in Abb. 3a dargestellten Zeitlaufs.

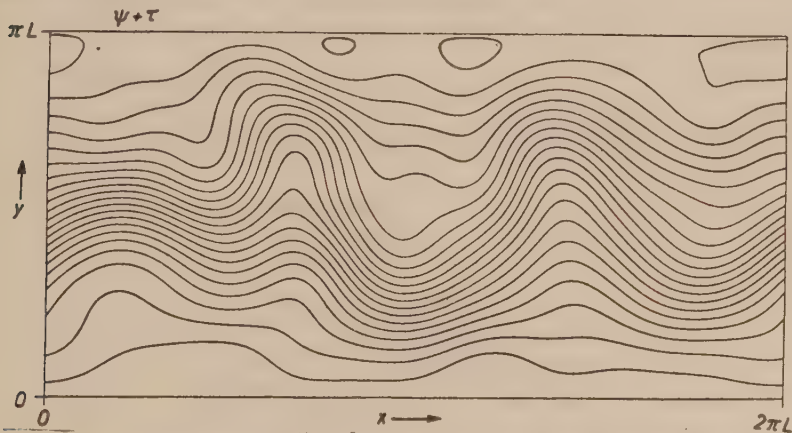


Abb. 5a: Momentanbild der Stromfunktion der oberen Schicht zum Zeitpunkt $t = 60$ Tage.
M=6, N=6.

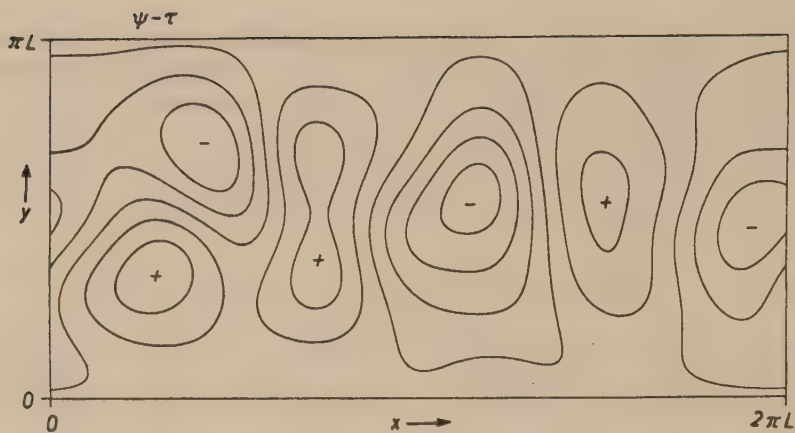


Abb. 5b: $\psi-\tau$; untere Schicht.

Die Auflösung (6,6) genügt also schon, um eine starke Ähnlichkeit mit atmosphärischen Strömungsbildern zu erreichen. (Abb.5).

II. Das zonal gemittelte Modell

Der Schritt vom dreidimensionalen Zirkulationsmodell zum zweidimensionalen Modell, in dem nur noch meridionale und vertikale Abhängigkeiten eine Rolle spielen, erfolgt durch Mittelbildung der Modellgleichungen (I.7) in zonaler Richtung. Aus den Definitionen der Orthogonalfunktionen (I.9) folgt, daß bei einer zonalen Mittelung über die Grundwellenlänge gilt: $\overline{F_{0m}}^x = F_{0m}$, $\overline{G_{nm}}^x = \overline{H_{nm}}^x = 0$.

Somit wird das zonale Mittel einer Variablen W nach (I.10) nur durch die Grundstromamplituden W_m^F dargestellt

$$\overline{W}^x = \sum_{m=1}^M W_m^F F_{0m} \quad (\text{II.1})$$

Nach Mittelbildung der Gleichungen (I.7) resultiert also in spektraler Darstellung ein prognostisches Gleichungssystem nur noch für die Grundstromamplituden. Es ist dasselbe System wie (I.17), aber mit $i = 1, \dots, M$. Mit den Definitionen für die nichtlinearen Terme

ADVEKTION (ψ_i) =

$$= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[a_i^{-2} (a_i^2 - a_k^2) c_{ijk} (\psi_j \psi_k + \theta_j \theta_k) \right] \quad (\text{II.2a})$$

ADVEKTION (θ_i) =

$$= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[c_{ijk} \frac{\sigma_{00} (a_i^2 - a_k^2) + 1}{\sigma_{00} a_i^2 + 1} \theta_j \psi_k + c_{ijk} \frac{\sigma_{00} (a_i^2 - a_k^2) - 1}{\sigma_{00} a_i^2 + 1} \psi_j \theta_k \right] \quad (\text{II.2b})$$

und mit den Abkürzungen

$$X_i = \frac{k_0 \sigma_{00} a_i^2}{\sigma_{00} a_i^2 + 1}$$

$$Y_i = \frac{\sigma_{00} a_i^2 (k_0 + 2k'_0) + h_0}{\sigma_{00} a_i^2 + 1}$$

$$Z_i = \frac{h_0}{\sigma_{00} a_i^2 + 1}$$

läßt sich das Gleichungssystem für das zonal gemittelte Modell angeben:

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_i &= \text{ADVEKTION}(\Psi_i) - k_i(\Psi_i - \theta_i) \\ \dot{\theta}_i &= \text{ADVEKTION}(\theta_i) + X_i \Psi_i - Y_i \theta_i + Z_i \theta_i^*, \quad i = 1, \dots, M.\end{aligned}\tag{II.3}$$

Aus (II.2) ist ersichtlich, daß in (II.3) auch Variable auftreten, die durch die 2M Modellgleichungen nicht berechnet werden können, nämlich die spektralen Störungsamplituden Ψ_j und θ_j , $j > M$. Für die nichtlinearen Terme (II.2) - es handelt sich hier nicht um die makroturbulente Transporte selbst, sondern um die Divergenz dieser Transporte - muß also zur Schließung des Systems eine Parametrisierung gefunden werden.

1. Der lineare Parametrisierungsansatz

Wie in vielen Arbeiten zuvor (z.B. Williams und Davies (1965), Sela und Wiin-Nielsen (1971)) wird hier ein linearer Parametrisierungsansatz zur Darstellung der Makroturbulenz gewählt. Diese Maßnahme hat den Vorteil, daß die Gleichungen des zonal gemittelten Modells linear werden. Es wird angenommen, daß die Advektionsterme (II.2) Funktionen sämtlicher dem zonal gemittelten Modell bekannten Variablen sind, um alle Möglichkeiten einer Abhängigkeit auszuschöpfen. Inwieweit die Abhängigkeiten bestehen, wird dann durch die Parametrisierungskoeffizienten geregelt. Der Parametrisierungsansatz wird also lauten:

$$\begin{aligned}\text{ADVEKTION}(\Psi_i) &= \alpha_i^\Psi + \sum_{j=1}^M (\beta_{ij}^\Psi \Psi_j + \gamma_{ij}^\Psi \theta_j) \\ \text{ADVEKTION}(\theta_i) &= \alpha_i^\theta + \sum_{j=1}^M (\beta_{ij}^\theta \Psi_j + \gamma_{ij}^\theta \theta_j)\end{aligned}\tag{II.4}$$

Mit Verwendung der Einstein'schen Summationsbezeichnung, die besagt, daß über doppelt vorkommende Indices summiert werden soll, wird (II.3) mit (II.4)

$$\dot{\Psi}_i = \alpha_i^\Psi + \beta_{ij}^\Psi \Psi_j + \gamma_{ij}^\Psi \Theta_j - k_o(\Psi_i - \Theta_i) \quad (II.5)$$

$$\dot{\Theta}_i = \alpha_i^\Theta + \beta_{ij}^\Theta \Psi_j + \gamma_{ij}^\Theta \Theta_j + X_i \Psi_i - Y_i \Theta_i + Z_i \Theta_i^*, \quad i = 1, \dots, M.$$

Mit (II.5) liegt nun ein geschlossenes Gleichungssystem vor, das linear ist. Der nächste Schritt ist die Bestimmung der Parametrisierungskoeffizienten $\alpha_i^\Psi, \alpha_i^\Theta, \beta_{ij}^\Psi, \beta_{ij}^\Theta, \gamma_{ij}^\Psi, \gamma_{ij}^\Theta$.

Im folgenden werden $\alpha_i^\Psi, \alpha_i^\Theta$ als inhomogene Parametrisierungskoeffizienten bezeichnet, da sie dem inhomogenen Teil des Systems angehören, entsprechend werden $\beta_{ij}^\Psi, \beta_{ij}^\Theta, \gamma_{ij}^\Psi, \gamma_{ij}^\Theta$ homogene Parametrisierungskoeffizienten genannt. Wie schon in der Einleitung erwähnt, liegt die Aufgabe des zonal gemittelten Modells hier nicht in der Simulierung der realen Atmosphäre. Stattdessen soll versucht werden, die Modellergebnisse bestmöglich an die Ergebnisse des dreidimensionalen Zirkulationsmodells anzupassen. Folglich müssen zur Bestimmung der Parametrisierungskoeffizienten die Ergebnisse des Vergleichsmodells herangezogen werden.

2. Berechnung der Parametrisierungskoeffizienten

Mit der Annahme, daß die Parametrisierungskoeffizienten konstant sind, ist (II.5) ein gewöhnliches, lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Form der Lösungen eines solchen Systems ist bekannt. (s. unten). Zur Beschaffung der speziellen (erwünschten) Lösungen werden die Ergebnisse des Vergleichsmodells herangezogen. Es werden die für die Lösungen des nichtlinearen Vergleichsmodells typischen Frequenzen, Amplituden und Mittelwerte ausgewählt. Sie liefern für die speziellen Lösungen des zonalgemittelten Modells die Eigenwerte (Frequenzen),

Integrationskonstanten (Amplituden) und Partikularintegrale des inhomogenen Systems (Mittelwerte). Mit Hilfe der so vorgeschriebenen Lösungen des Systems (II.5) können die noch unbekannten Parameter von (II.5), nämlich die Parametrisierungskoeffizienten, ermittelt werden. Vorerst wird es aber erforderlich sein, sich mit der Theorie linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu befassen. Im folgenden wird ein allgemeiner Überblick über die Art der Lösungen gegeben.

Ein erfolgreicher Lösungsansatz für ein homogenes, lineares Differentialgleichungssystem, bestehend aus $2M$ Gleichungen 1. Ordnung, für die Variablen W_i und mit der unabhängig Veränderlichen t ist der Ansatz

$$W_i^h = A_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, \dots, 2M$$

Er führt auf ein charakteristisches Polynom $2M$. Grades, das die Wurzeln (Eigenwerte) λ_k , $k = 1, \dots, 2M$ besitzt. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Linearkombination der partikulären Lösungen $e^{\lambda_k t}$:

$$W_i^h = \sum_{k=1}^{2M} A_{ik} e^{\lambda_k t} \quad i = 1, \dots, 2M.$$

Sind ein Teil der Eigenwerte λ_k komplex, dann treten sie wegen der reellen Koeffizienten der Differentialgleichungen konjugiert komplex auf, so daß die allgemeine Lösung lautet

$$W_i^h = \sum_{k=1}^{k_1} A_{ik} e^{\lambda_k t} + \sum_{\ell=1}^{\ell_1} e^{\lambda_\ell^{(r)} t} (B_{i\ell} \cos \lambda_\ell^{(i)} t + C_{i\ell} \sin \lambda_\ell^{(i)} t)$$

wobei die $\lambda_\ell^{(r)}$ und $\lambda_\ell^{(i)}$ die Realteile bzw. Imaginärteile der komplexen Eigenwerte sind. Die Anzahl der verschiedenen Partikularintegrale bedingt:

$$2\ell_1 + k_1 = 2M$$

Für die partikuläre Lösung des inhomogenen Systems führt in vielen Fällen (nämlich dann, wenn die Störfunktion sich aus einem Polynom, einer Cosinus- oder Sinusfunktion oder einer Exponentialfunktion zusammensetzt) ein solcher Ansatz zum Ziel, der in seiner Gestalt dem inhomogenen Teil der Differentialgleichungen (Störfunktion) entspricht. In dem Modell wirkt als Störfunktion die vorgegebene Temperatur Θ^* .

Für den Fall $\Theta^* = \text{const.}$ ist also der Ansatz in der Form

$$W_i^{\text{inh.}} = D_i \quad i = 1, \dots, 2M$$

zu machen. Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems wäre somit von der Form

$$W_i = W_i^h + W_i^{\text{inh.}} = \quad (II.6)$$

$$D_i + \sum_{k=1}^{k_1} A_{ik} e^{\lambda_k t} + \sum_{\ell=1}^{\ell_1} e^{\lambda_\ell^{(*)} t} (B_{i\ell} \cos \lambda_\ell^{(i)} t + C_{i\ell} \sin \lambda_\ell^{(i)} t)$$

Es sollen noch einige Einschränkungen, die den Typ der Lösungen betreffen, getroffen werden. Die Ergebnisse des nichtlinearen Modells mit konstantem Θ_n^* zeigen unregelmäßige Schwankungen der Variablen um einen wohldefinierten Mittelwert, der auch nach längeren Rechnungen konstant bleibt (Abb. 2 b,c). Die Simulation dieser Ergebnisse wird also nur die Betrachtung von sogenannten stabilen Lösungen des linearen Modells erfordern, das bedeutet

$\lambda_R \leq 0$. Außerdem beobachtet man weder ein Anwachsen noch ein Ausdämpfen der Kurzzeitschwankungen, so daß $\lambda_\ell^{(*)} = 0$ gefordert werden muß. Abgesehen von der anfänglichen Einstellzeit (in Abb. 2a: 70 Tage), die für längere Rechnungen mit dem linearen Modell uninteressant ist, sind die Zeitmittel konstant. Es kann daher auf den 2. Term in (II.6) verzichtet werden: $A_{iR} = 0$. Letztlich werden also nur Lösungen mit komplexen Eigenwerten mit verschwindendem Realteil zugelassen. Der gesuchte Lösungstyp wird somit allgemein durch

$$W_i = D_i + \sum_{\ell=1}^M (B_{i\ell} \cos \lambda_\ell^{(*)} t + C_{i\ell} \sin \lambda_\ell^{(*)} t) \quad (II.7)$$

$$i = 1, \dots, 2M$$

dargestellt, wobei nun die Summe bis M laufen muß, da die $2M$ Partikularintegrale des homogenen Systems nur noch in einer Summe zusammengefaßt sind (jedem l sind ein Eigenwertepaar zuzuordnen, also 2 Partikularintegrale). Die B_{il} , C_{il} und D_i sind die aus den Lösungen des Vergleichsmodells ausgewählten (s. Abschnitt 3) charakteristischen Größen.

Setzt man nun die $2M$ Lösungen des Typs (II.7) in die $2M$ Systemgleichungen ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich der Cosinus- und Sinusglieder und der konstanten Glieder ein algebraisches System, bestehend aus $2M \cdot (2M+1) = 4M^2 + 2M$ Gleichungen, da aus jeder Differentialgleichung wegen der $(2M+1)$ verschiedenartigen Glieder $(2M+1)$ Gleichungen hervorgehen. Dieses Gleichungssystem stellt die Bedingungen dar, die die genau $(4M^2 + 2M)$ Parametrisierungskoeffizienten $\alpha_i^\psi, \alpha_i^o, \beta_{ij}^\psi, \beta_{ij}^o, \gamma_{ij}^\psi, \gamma_{ij}^o$ erfüllen müssen, wenn das Differentialgleichungssystem die vorgegebenen Lösungen liefern soll.

Die Lösungen des speziellen Gleichungssystems (II.5) seien entsprechend dem Typ (II.7) angesetzt:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \bar{\psi}_i + \psi_{ie}^c \cos \nu_e t + \psi_{ie}^s \sin \nu_e t \\ \theta_i &= \bar{\theta}_i + \theta_{ie}^c \cos \nu_e t + \theta_{ie}^s \sin \nu_e t \end{aligned} \quad i, l = 1, \dots, M \quad (\text{II.8})$$

Der Imaginärteil der Eigenwerte $\lambda_e^{(i)}$ sei im folgenden mit der Frequenz ν_e bezeichnet. Einsetzen von (II.8) in (II.5) ergibt nach Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \alpha_i^\psi + \beta_{ij}^\psi \bar{\psi}_j + \gamma_{ij}^\psi \bar{\theta}_j - k_o (\bar{\psi}_i - \bar{\theta}_i) &= 0 \\ \alpha_i^o + \beta_{ij}^o \bar{\psi}_j + \gamma_{ij}^o \bar{\theta}_j + X_i \bar{\psi}_i - Y_i \bar{\theta}_i + Z_i \theta_i^* & \end{aligned} \quad (\text{II.9a})$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 \psi_{i1}^c + \beta_{ij}^{\psi} \psi_{j1}^s + \gamma_{ij}^{\psi} \theta_{j1}^s - k_o (\psi_{i1}^s - \theta_{i1}^s) &= 0 \\
 \gamma_1 \theta_{i1}^c + \beta_{ij}^{\theta} \psi_{j1}^s + \gamma_{ij}^{\theta} \theta_{j1}^s + X_i \psi_{i1}^s - Y_i \theta_{i1}^s &= 0 \\
 -\gamma_1 \psi_{i1}^s + \beta_{ij}^{\psi} \psi_{j1}^c + \gamma_{ij}^{\psi} \theta_{j1}^c - k_o (\psi_{i1}^c - \theta_{i1}^c) &= 0 \\
 -\gamma_1 \theta_{i1}^s + \beta_{ij}^{\theta} \psi_{j1}^c + \gamma_{ij}^{\theta} \theta_{j1}^c + X_i \psi_{i1}^c - Y_i \theta_{i1}^c &= 0
 \end{aligned}$$



(II.9b)

$$\begin{aligned}
 \gamma_M \psi_{iM}^c + \beta_{ij}^{\psi} \psi_{jM}^s + \gamma_{ij}^{\psi} \theta_{jM}^s - k_o (\psi_{iM}^s - \theta_{iM}^s) &= 0 \\
 \gamma_M \theta_{iM}^c + \beta_{ij}^{\theta} \psi_{jM}^s + \gamma_{ij}^{\theta} \theta_{jM}^s + X_i \psi_{iM}^s - Y_i \theta_{iM}^s &= 0 \\
 -\gamma_M \psi_{iM}^s + \beta_{ij}^{\psi} \psi_{jM}^c + \gamma_{ij}^{\psi} \theta_{jM}^c - k_o (\psi_{iM}^c - \theta_{iM}^c) &= 0 \\
 -\gamma_M \theta_{iM}^s + \beta_{ij}^{\theta} \psi_{jM}^c + \gamma_{ij}^{\theta} \theta_{jM}^c + X_i \psi_{iM}^c - Y_i \theta_{iM}^c &= 0
 \end{aligned}$$

Unter Vorgabe der charakteristischen Größen der Lösungen des dreidimensionalen Modells, also der Mittelwerte $\overline{\psi_i}, \overline{\theta_i}$ der dominierenden Frequenzen γ_i der Kurzzeitschwankungen und der dazugehörigen Amplituden $\psi_{ie}^c, \psi_{ie}^s, \theta_{ie}^c, \theta_{ie}^s$ kann das System (II.9) für die Parametrisierungskoeffizienten gelöst werden. Die Lösung erfolgt numerisch unter Verwendung der IBM Subroutine SIMQ (Variante des Simplex Verfahrens).

3. Spektrale Analyse der Lösungen der nichtlinearen Modellgleichung

Die charakteristischen Merkmale des Zeitverlaufs der Grundstromamplituden (Abb. 2) können durch eine Fourieranalyse dieser Zeitreihen gewonnen werden. Das Zeitintervall zwischen dem 120. und 240. Tag (Intervalllänge T) der Modellrechnung soll zur Analyse genügen. Wenn $t = \mu \Delta t$ und $T = \hat{\mu} \Delta t$ ist, dann ergeben sich die Fourierkoeffizienten der Zeitreihen $\psi_i(\mu)$ und $\theta_i(\mu)$ in Abhängigkeit von der Wellenzahl ℓ' (nicht zu verwechseln mit den Wellenzahlen m und n der räumlichen Auflösung) zu

$$\begin{aligned}\psi_i^c(\ell') &= \frac{2}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \psi_i(\mu) \cos \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}} \\ \psi_i^s(\ell') &= \frac{2}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \psi_i(\mu) \sin \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}} \\ \theta_i^c(\ell') &= \frac{2}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \theta_i(\mu) \cos \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}} \\ \theta_i^s(\ell') &= \frac{2}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \theta_i(\mu) \sin \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}}\end{aligned}\tag{II.10}$$

Da $\hat{\mu}$ die Anzahl der Stützstellen im Intervall T darstellt, ist $\hat{\mu}/2$ die Wellenzahl der kleinsten auflösbaren Welle.

Mit den Mittelwerten

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_i &= \frac{1}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \psi_i(\mu) \\ \bar{\theta}_i &= \frac{1}{\hat{\mu}} \sum_{\mu=1}^{\hat{\mu}} \theta_i(\mu)\end{aligned}$$

lassen sich die Zeitreihen $\psi_i(\mu)$ und $\theta_i(\mu)$ durch die Fourierreihen annähern:

$$\begin{aligned}\psi_i(\mu) &= \overline{\psi_i} + \sum_{\ell'=1}^{M/2} (\psi_i^c(\ell') \cos \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}} + \psi_i^s(\ell') \sin \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}}) \\ \theta_i(\mu) &= \overline{\theta_i} + \sum_{\ell'=1}^{M/2} (\theta_i^c(\ell') \cos \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}} + \theta_i^s(\ell') \sin \frac{2\pi \ell' \mu}{\hat{\mu}})\end{aligned}\quad (\text{II.11})$$

Die Lösungen (II.8) des linearen Modells können als eine abgehackte Fourierreihe mit nur M verschiedenen Frequenzen angesehen werden. Die Aufgabe, die Lösungen (II.8) des linearen Systems möglichst gut an die Lösungen (II.11) des nichtlinearen Systems anzupassen, besteht somit in einer sorgfältigen Auswahl von M Frequenzen aus (II.11). Man kann annehmen, daß die Wellen mit den größten Amplituden am meisten das charakteristische Bild der Zeitreihen bestimmen. Anhand der Spektren der Zeitreihen werden also M verschiedene Wellenzahlen ℓ'' ausgewählt und damit die dominierenden Frequenzen $\nu_{\ell''} = 2\pi \ell''/T$ und die dazugehörigen Fourierkoeff.

$$\begin{aligned}\psi_{i\ell}^c &= \psi_i^c(\ell'') \quad , \quad \psi_{i\ell}^s = \psi_i^s(\ell'') \\ \theta_{i\ell}^c &= \theta_i^c(\ell'') \quad , \quad \theta_{i\ell}^s = \theta_i^s(\ell'')\end{aligned}\quad i, \ell = 1, \dots, M$$

gewonnen. Die Auswahl der Frequenzen ist eine subjektive Entscheidung: es werden je nachdem, welche Wellen bevorzugt werden, natürlich unterschiedliche Sätze von Parametrisierungskoeffizienten errechnet. Allerdings wird die Wahl dadurch erleichtert, daß bei niedriger Auflösung in y-Richtung, z.B. $M=2$, nur wenige Frequenzen, diese aber deutlich, dominieren. Bei hoher Auflösung ($M=6$) ist die Dominanz weniger Frequenzen nicht so ausgeprägt, dafür hat man hier aber die Möglichkeit, mehr Wellen (6) auszuwählen. Die Spektren der Zeitreihen aus Abb. 2b und Abb. 3a mögen das verdeutlichen. Abb. 6a zeigt das Spektrum des Zeitverlaufs der Grundstromamplituden für die Auflösung (2,4) und mit $\Theta_{\lambda}^* = 9/128$ (dargestellt in Abb. 2b).

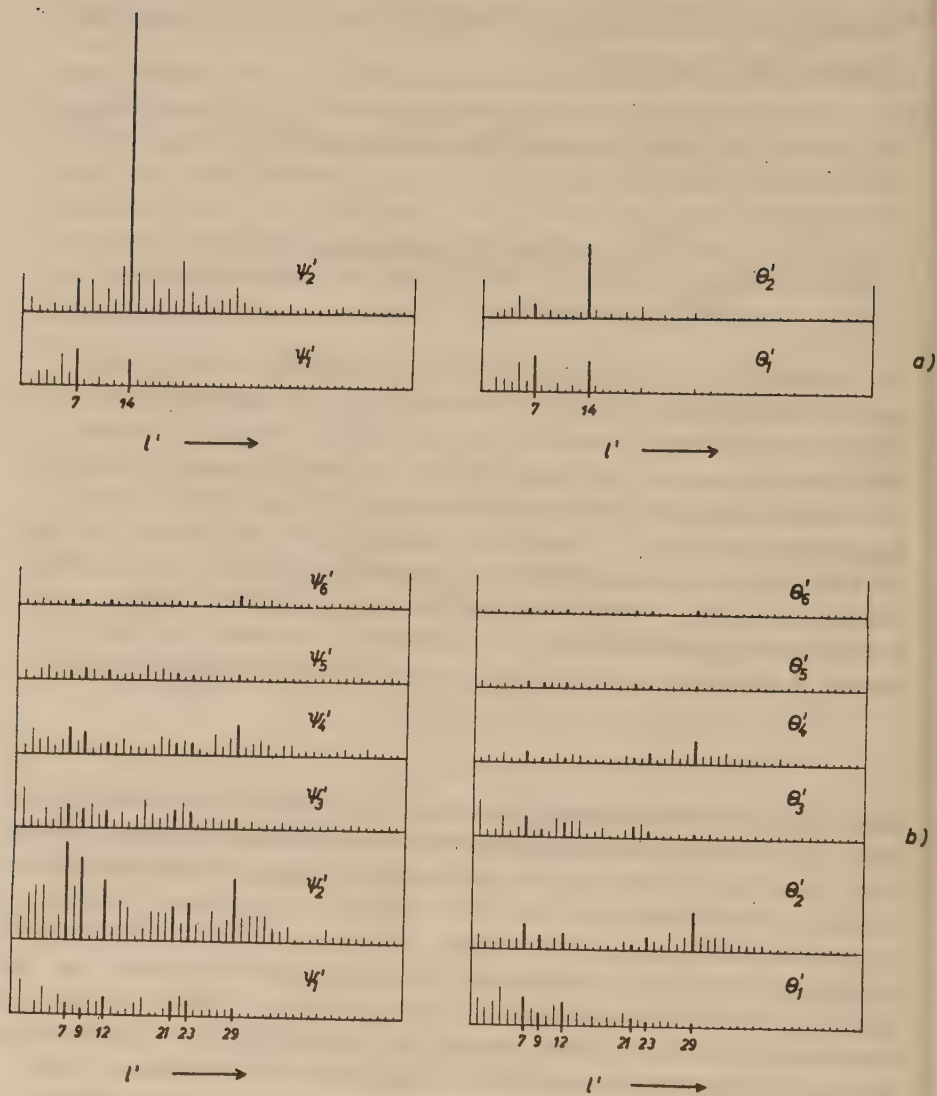


Abb. 6: Spektren der Zeitschwankungen des zonalen Grundstroms.
a: $M = 2$, $N = 4$, $\Theta^* = 9/128$ (Abb.2b),
b: $M = 6$, $N = 6$, $\Theta^* = 10/128$ (Abb.3a)

Aufgetragen sind die Wellenamplituden

$$\psi_i' = \sqrt{(\psi_i^c)^2 + (\psi_i^s)^2} \quad \text{und} \quad \theta_i' = \sqrt{(\theta_i^c)^2 + (\theta_i^s)^2}$$

in Abhängigkeit von der Wellenzahl ℓ' . Das Spektrum der Kurven aus Abb. 3a, also für die Auflösung (6,6) und mit $\theta_1^* = 10/128$ wird in Abb. 6b dargestellt. Die dick nachgezogenen bezifferten Linien kennzeichnen jeweils die ausgewählten Frequenzen, die zur Berechnung der Parametrisierungskoeffizienten herangezogen werden. Es sind dieses für die Auflösung (2,4) die Wellen mit den Wellenzahlen 7 und 14 (16- und 8-tägige Periode), für die Auflösung (6,6) die Wellen mit den Wellenzahlen 7, 9, 12, 21, 23, 29 (letztere Welle hat die deutliche erkennbare 4-tägige Periode).

Die Lösung der jetzt bekannten Modellgleichungen (II.5) mit konstantem θ_1^* ist durch (II.8) gegeben. Der eigentliche Sinn des zonal gemittelten Modells ist aber in der Untersuchung der Reaktion des Modells auf eine sich ändernde Zwangsfunktion zu sehen. Für ein variables θ_1^* kann die Lösung von (II.5) zwar auch analytisch (durch Variation der Konstanten) ermittelt werden, doch ist dieses Verfahren im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die linearen Gleichungen (II.5) werden daher auch numerisch gelöst.

4. Numerisches Lösungsverfahren für die linearen Gleichungen

Abweichend von der in Kapitel I.3 beschriebenen Methode wird die Integration der Gleichungen (II.5) mit Hilfe eines erweiterten Verfahrens durchgeführt. Es zeigt sich nämlich schon nach ca. 300 Tagen Modellzeit eine deutliche Zunahme der Amplituden der Kurzzeitschwankungen, wenn von dem Heun Schema (Lorenz, 1963a) Gebrauch gemacht wird. Einen Überblick über verschiedene Differenzenschemen und deren numerische Fehler für Dgln. 1. Ordnung gibt Young (1968). Er stellt fest, daß zur Verminderung des numerischen Fehlers eine Vergrößerung der Anzahl der Einzeloperationen, die pro Zeitschritt gemacht werden, weitaus wirksamer ist als eine Verkleinerung des Zeitschritts, wobei dieser Vergleich für gleichen zeitlichen Rechenaufwand gilt. Das um eine Einzeloperation erweiterte Heun Schema - von Young (1968) Methode A genannt -, besteht aus zwei Vorwärtsschritten und einem zentrierten Schritt. Die beiden Vorwärtsschritte werden jeweils über das halbe Zeitinkrement ausgeführt:

$$W_{\mu+1/2}^* = W_{\mu} + \frac{\Delta t}{2} RS_{\mu}$$

$$\hat{W}_{\mu+1/2} = W_{\mu} + \frac{\Delta t}{2} (RS_{\mu} + RS_{\mu+1/2}^*) \cdot \frac{1}{2}$$

Es folgt der zentrierte Schritt mit der Schrittweite Δt :

$$W_{\mu+1} = W_{\mu} + \Delta t \hat{RS}_{\mu+1/2}$$

Zur Integration mit diesem Verfahren werden die gleichen Zeitschritte - entsprechend der Auflösung - benutzt wie zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen. Zur Reduzierung des numerischen Fehlers erweist sich nach Young die Methode A auch für nichtlineare Gleichungen als wirksam. Wegen des ohnehin grossen Rechenaufwands zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen wurde aber dort auf die verbesserte Methode verzichtet.

III. Lösungen des zonal gemittelten Modells

1. Konstante Parametrisierungskoeffizienten

Wenn die Integration des linearen Gleichungssystems (II.5) mit den aus (II.9) berechneten Parametrisierungskoeffizienten die Lösung (II.8) liefern soll, so müssen auch die Anfangswerte ein Bestandteil von (II.8) sein. Denn es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Anfangswerten und Integrationskonstanten. In dem vorliegenden Problem sind die Integrationskonstanten (Fourieramplituden) gegeben. Für $t=0$ folgt aus (II.8):

$$\begin{aligned}\psi_i(t=0) &= \bar{\psi}_i + \psi_{ie}^c \\ \theta_i(t=0) &= \bar{\theta}_i + \theta_{ie}^c\end{aligned}\quad (III.1)$$

Die Integration des Systems (II.5) mit den Anfangsbedingungen (III.1) wird für den Fall $M = 2$ mit $\theta_a^* = 9/128$ durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 dargestellt.

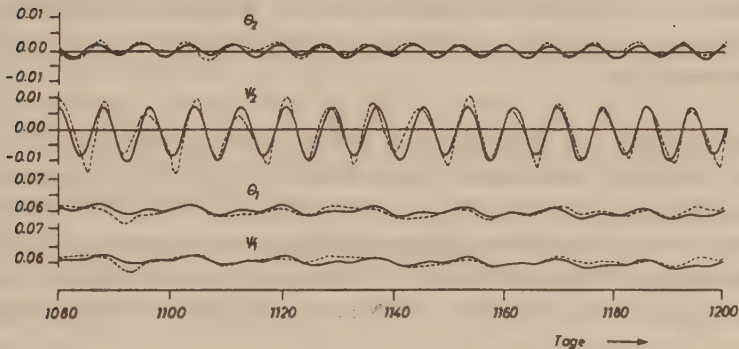


Abb. 7: Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$,
 $\theta_a^* = 9/128$. Relative Einheiten
 ————— zonal gemittelttes Modell
 - - - - - Vergleichsmodell

Als Nachweis für die Stabilität des numerischen Lösungsverfahrens wird über einen relativ großen Zeitraum integriert. Die Abb. 7 zeigt den Abschnitt zwischen dem 1080. und dem 1200. Tag. Zum Vergleich sind die entsprechenden Ergebnisse des nichtlinearen Modells (Abb. 2b), die hier simuliert werden sollen, gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt die gute Übereinstimmung der Lösungen beider Modelle an den wesentlichen Merkmalen:

- a) die Zeitmittel sind exakt simuliert (z.B. $\psi_1 = 0,061$)
- b) die 2 ausgewählten Wellenzahlen $\ell' = 7$ und $\ell' = 14$ (Abb. 6a) liefern die Perioden von $\sim 17,2$ und $8,6$ Tagen, die auch in Abb. 2b vorherrschen,
- c) die Amplituden ψ_i' und θ_i' entsprechen im Zeitmittel denen in Abb. 2b,
- d) die Phasenverschiebungen, gegeben durch $\arctan(\psi_i^s/\psi_i^c)$ und $\arctan(\theta_i^s/\theta_i^c)$ werden gut wiedergegeben,
- e) die Eigenwerte sind rein imaginär (gleichbleibende Amplituden).

Ebenso gute Ergebnisse werden bei der Simulation des nichtlinearen Zeitlaufs mit höherer Auflösung ($M = 6$, $\theta_1^* = 10/128$) erzielt (Abb. 8).

Bis hierher ist also gezeigt worden, daß es möglich ist, bei konstant gehaltener Zwangsfunktion mit Hilfe bekannter charakteristischer Merkmale der Lösungen des nichtlinearen Modells ein lineares Differentialgleichungssystem zu konstruieren, dessen Lösungen die maximale Anzahl dieser charakteristischen Merkmale aufweisen. Weitere Merkmale (mehr

als M Frequenzen) können nicht reproduziert werden, da sonst wegen der beschränkten (maximalen) Anzahl der Parametrisierungskoeffizienten das System (II.9) zur Berechnung der Koeffizienten überbestimmt wäre.

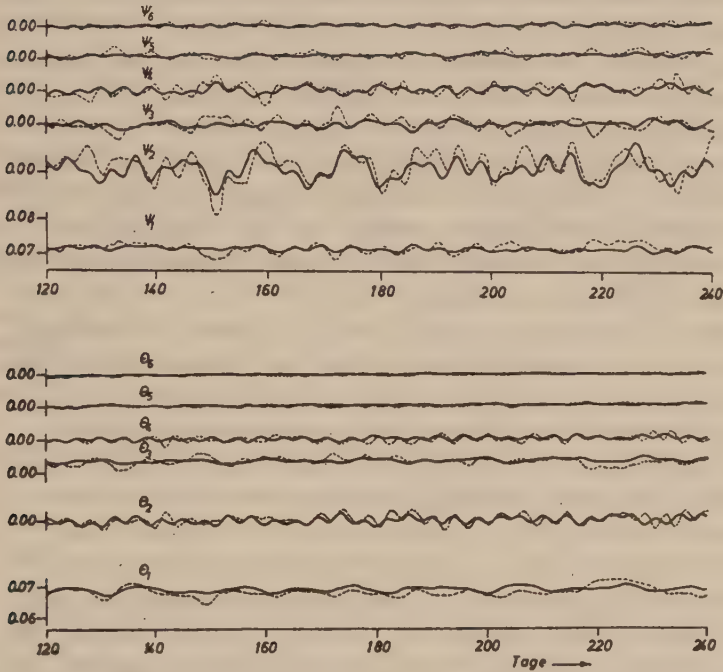


Abb.8: Grundstromamplituden, $M = 6$, $N = 6$, $\Theta_n^* = 10/128$.
Relative Einheiten

———— zonal gemittelttes Modell
----- Vergleichsmodell

Dieser Erfolg des zonal gemittelten Modells muß sich aber zwangsläufig einstellen, da letztlich sämtliche Eigenschaften der erwünschten Lösungen über die Parametrisierungskoeffizien-

ten in die Differentialgleichungen "hineingesteckt" werden.

Der nächste Schritt wird die Untersuchung der Frage sein, wie das zonal gemittelte Modell mit konstant gehaltenen Parametrisierungskoeffizienten auf eine zeitabhängige Zwangsfunktion reagiert. Die Antwort auf diese Frage liefern Rechnungen mit dem System (II.5), in welchem nun auch wie im dreidimensionalen Vergleichsmodell Θ_1^* einer sinusförmigen Variation unterliegt (nach (I.19)). Da die für die konstante Zwangsfunktion $\Theta_1^* = 9/128$ berechneten konstanten Parametrisierungskoeffizienten benutzt werden, ist es klar, daß nun nicht - wie mit konstantem Θ_1^* eine optimale Simulation erzwungen werden kann. Die Ergebnisse für $M = 2$ mit $\Theta_1^* = 9/128$ werden in Abb. 9, für $M = 6$ mit $\Theta_1^* = 10/128$ in Abb. 10 gezeigt (im letzteren Fall möge die Darstellung der Grundstromamplituden von ψ genügen). Schon ein oberflächlicher Vergleich mit den entsprechenden Lösungen des nichtlinearen Modells (Abb. 2d und 3b) zeigt einen glatten Mißerfolg. Es ist selbstverständlich, daß die ausgewählten Frequenzen der Kurzzeitschwankungen anders als im nichtlinearen Fall während des Zeitlaufs konstant bleiben, denn die Eigenwerte linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten sind immer Konstante, also unabhängig von der Störfunktion des Differentialgleichungssystems. Sehr unerfreulich ist jedoch die übertriebene Reaktion der Mittelwerte auf die Änderung von Θ_1^* .

Hier ist unter den Mittelwerten der zeitliche "Trend" der Variablen zu verstehen: der Mittelungszeitraum sei also klein gegenüber der Schwankungsperiode T der Zwangsfunktion, doch groß gegenüber der Periode der Eigenschwingungen. Die Zu- und Abnahme dieser Mittelwerte bei Zu- und Abnahme von Θ_1^* wird von dem zonal gemittelten Modell um mehr als eine Größenordnung überschätzt. Im Fall $M = 6$ (Abb. 10) trifft dies nicht für ψ_1 zu, doch scheinen die übrigen Grundstromamplituden einen recht willkürlichen Verlauf zu nehmen.

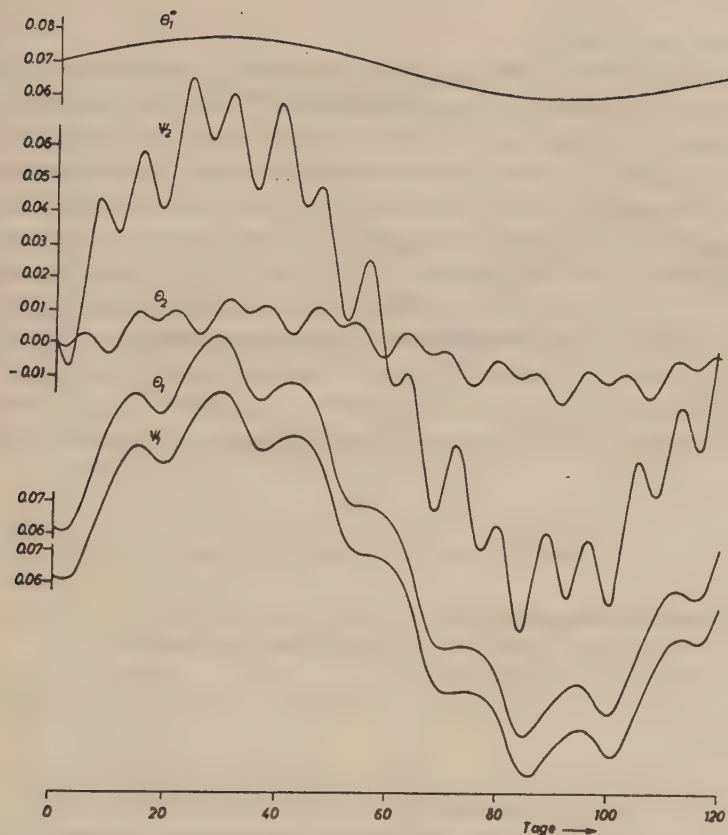


Abb.9: Grundstromamplituden, $M = 2$, $(N = 4)$,
 $\bar{\theta}_1^* = 9/128$, $\theta_1^{*s} = 1/128$. Konstante Parametrisierungskoeffizienten.

Der Grund für die schlechte Simulation ist zweifellos darin zu sehen, daß die Parametrisierungskoeffizienten konstant gehalten werden. Die Koeffizienten sind nur für ein bestimmtes θ_1^* berechnet, und mit ihrer Hilfe ist das Modell nur in der Lage, die spezifischen Eigenschaften der Lösungen mit diesem festen θ_1^* wiederzugeben. Auch Beobachtungen zeigen, daß Austauschkoefizienten für die quasi-geostrophische potentielle Vorticity eine Funktion der Jahreszeit sind (Wiin-Nielsen u. Sela, 1971).

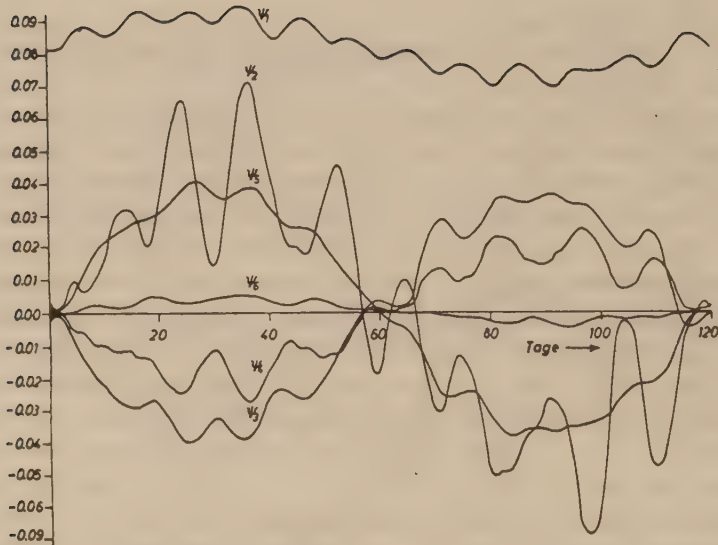


Abb. 10: Grundstromamplituden ψ_i , $M = 6$, $(N = 6)$,
 $\bar{\theta}_i^* = 10/128$, $\theta_i^{*s} = 1/128$. Konstante Parametrisierungskoeffizienten

Sie sind also von der Zwangsfunktion abhängig. Eine Verbesserung der bisherigen Ergebnisse könnte deshalb mit zeitabhängigen Koeffizienten, die eine Änderung der Zwangsfunktion berücksichtigen, erzielt werden.

2. Zeitliche Änderung der inhomogenen Parametrisierungskoeffizienten

Der wesentliche Faktor der fehlerhaften Simulation ist die falsche Reaktion der Mittelwerte auf die geänderte Zwangsfunktion. Zwischen den Mittelwerten und den sogenannten inhomogenen Parametrisierungskoeffizienten α_i^ψ und α_i^θ besteht ein eindeutiger Zusammenhang, nämlich Gleichung (II.9a). Demnach sind diese inhomogenen Koeffizienten auch für eine korrekte Simulation der Mittelwerte zuständig. Eine zeitliche Änderung der α_i^ψ und α_i^θ , die der Änderung der Zwangsfunktion angepaßt wird, scheint daher erfolgversprechend zu sein.

Das Ausmaß der notwendigen Korrektur der inhomogenen Koeffizienten wird von den "erwünschten" Mittelwerten bestimmt, die aber noch nicht bekannt sind. Daher werden weitere Rechnungen mit dem dreidimensionalen Vergleichsmodell erforderlich. Unter der Voraussetzung, daß man die mögliche Schwankungsbreite der Zwangsfunktion kennt - die Extremwerte seien $\theta_{i \max}^*$ und $\theta_{i \min}^*$ - können mit dem Zirkulationsmodell die dazugehörigen Mittelwerte $\overline{\Psi}_{i \max}$, $\overline{\theta}_{i \max}$, $\overline{\Psi}_{i \min}$, $\overline{\theta}_{i \min}$ bestimmt werden. Das Gleichungssystem (II.9a) ermöglicht die Berechnung der Extremwerte von α_i^ψ und α_i^θ für $\theta_{i \max}^*$ und $\theta_{i \min}^*$, womit dann die Schwankungsbreite der inhomogenen Parametrisierungskoeffizienten gegeben ist:

$$\begin{aligned}\alpha_{i \max}^\psi &= -\beta_{ij}^\psi \overline{\Psi}_{j \max} - \gamma_{ij}^\psi \overline{\theta}_{j \max} + k_0 (\overline{\Psi}_{i \max} - \overline{\theta}_{i \max}) \\ \alpha_{i \min}^\psi &= -\beta_{ij}^\psi \overline{\Psi}_{j \min} - \gamma_{ij}^\psi \overline{\theta}_{j \min} + k_0 (\overline{\Psi}_{i \min} - \overline{\theta}_{i \min}) \\ \alpha_{i \max}^\theta &= -\beta_{ij}^\theta \overline{\Psi}_{j \max} - \gamma_{ij}^\theta \overline{\theta}_{j \max} - X_i \overline{\Psi}_{i \max} + Y_i \overline{\theta}_{i \max} - Z_i \theta_{i \max}^* \\ \alpha_{i \min}^\theta &= -\beta_{ij}^\theta \overline{\Psi}_{j \min} - \gamma_{ij}^\theta \overline{\theta}_{j \min} - X_i \overline{\Psi}_{i \min} + Y_i \overline{\theta}_{i \min} - Z_i \theta_{i \min}^*\end{aligned}\quad (\text{III.2})$$

Die hier auftretenden β_{ij}^ψ , β_{ij}^θ , γ_{ij}^ψ , γ_{ij}^θ sind diejenigen Koeffizienten, die für das mittlere $\overline{\theta}_i^*$ berechnet wurden und im folgenden konstant gehalten werden sollen. Zur Gewinnung zeitabhängiger inhomogener Parametrisierungskoeffizienten ist für sie eine der Zwangsfunktion folgende Änderung vorgesehen. Im Falle einer sinusförmigen Variation von θ_i^* gemäß (I.19) erhält man demnach

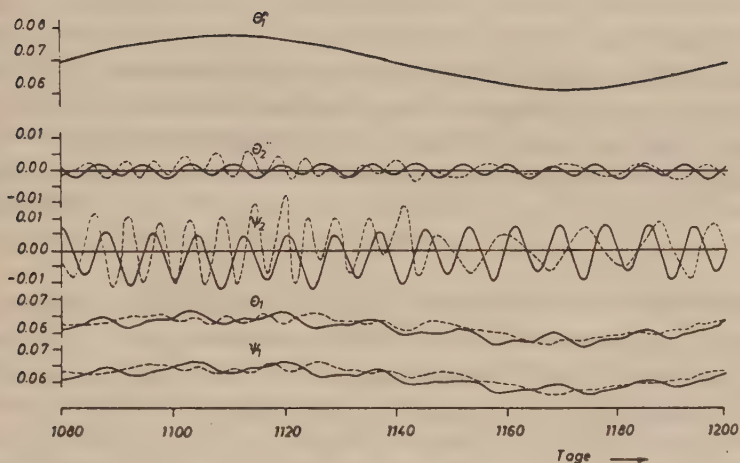
$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^\psi(t) &= \alpha_i^\psi + (\alpha_{i\max}^\psi - \alpha_i^\psi) \sin \frac{2\pi t}{T} \\ \alpha_i^\theta(t) &= \alpha_i^\theta + (\alpha_{i\max}^\theta - \alpha_i^\theta) \sin \frac{2\pi t}{T} \end{aligned} \right\} 0 < t \leq \frac{T}{2} \quad (\text{III.3})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^\psi(t) &= \alpha_i^\psi + (\alpha_i^\psi - \alpha_{i\min}^\psi) \sin \frac{2\pi t}{T} \\ \alpha_i^\theta(t) &= \alpha_i^\theta + (\alpha_i^\theta - \alpha_{i\min}^\theta) \sin \frac{2\pi t}{T} \end{aligned} \right\} \frac{T}{2} < t \leq T$$

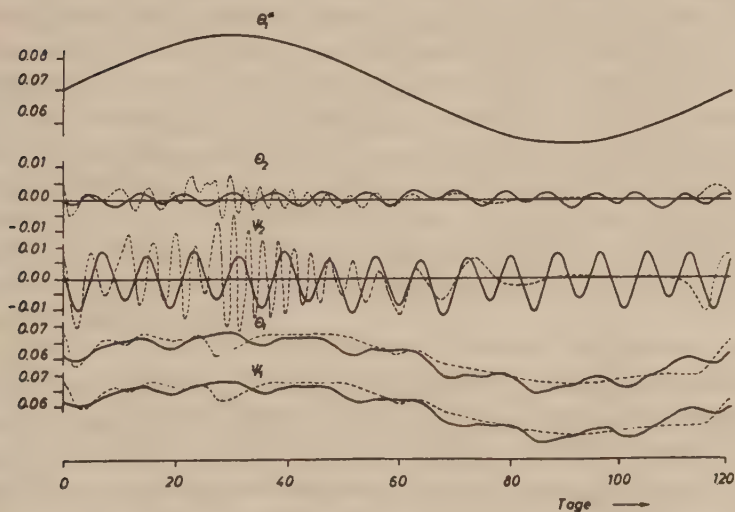
wobei hier α_i^ψ und α_i^θ die für $\bar{\Theta}_i^*$ ermittelten Werte haben. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems mit den zeitabhängigen $\alpha_i^\psi(t)$, $\alpha_i^\theta(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_i &= \alpha_i^\psi(t) + \beta_{ij}^\psi \Psi_j + \gamma_{ij}^\psi \Theta_j - k_i (\Psi_i - \Theta_i) \\ \dot{\Theta}_i &= \alpha_i^\theta(t) + \beta_{ij}^\theta \Psi_j + \gamma_{ij}^\theta \Theta_j + X_i \Psi_i - Y_i \Theta_i + Z_i \Theta_i^*(t) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

werden in den Abb. 11 - 13 gezeigt. Die Lösungen der Vergleichsrechnungen mit dem Zirkulationsmodell sind überall gestrichelt eingezeichnet. In Abb. 11 sind die Ergebnisse mit der Auflösung (2,4) dargestellt. Für die zeitabhängige Zwangsfunktion wurden folgende Parameter gewählt: $\bar{\Theta}_1^* = 9/128$, $T = 120$ Tage, $\Theta_1^{*\psi} = 1/128$ (d.h. $\Theta_{1\max}^* = 10/128$, $\Theta_{1\min}^* = 8/128$) in Abb. 11a, $\Theta_1^{*\theta} = 2/128$ (d.h. $\Theta_{1\max}^* = 11/128$, $\Theta_{1\min}^* = 7/128$) in Abb. 11b: Die langfristige Rechnung bis zum 1200. Tag soll zum Nachweis für das stabile Verhalten der Lösungen dienen. Es ist deutlich zu erkennen, daß jetzt der zeitliche Trend (Mittelwerte) der Grundstromvariablen vom zonal gemittelten Modell sehr gut wiedergegeben wird. Leider ist es wegen der konstanten homogenen Parametrisierungskoeff-



a)



b)

Abb. 11: Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$

$\theta_1^* = 9/128$, $\theta_1^{*s} = 1/128$ (a),

$\theta_1^{*s} = 2/128$ (b). Zeitabhängige inhomogene Parametrisierungskoeffizienten. Relative Einheiten

—— zonal gemittelttes Modell
 - - - - Vergleichsmodell

fizienten nicht möglich, die bei den Vergleichsergebnissen stark ausgeprägte Frequenz- und Amplitudenmodulation nachzuahmen. Das gleiche gilt für die Ergebnisse der Rechnungen mit hoher Auflösung (Abb. 12).

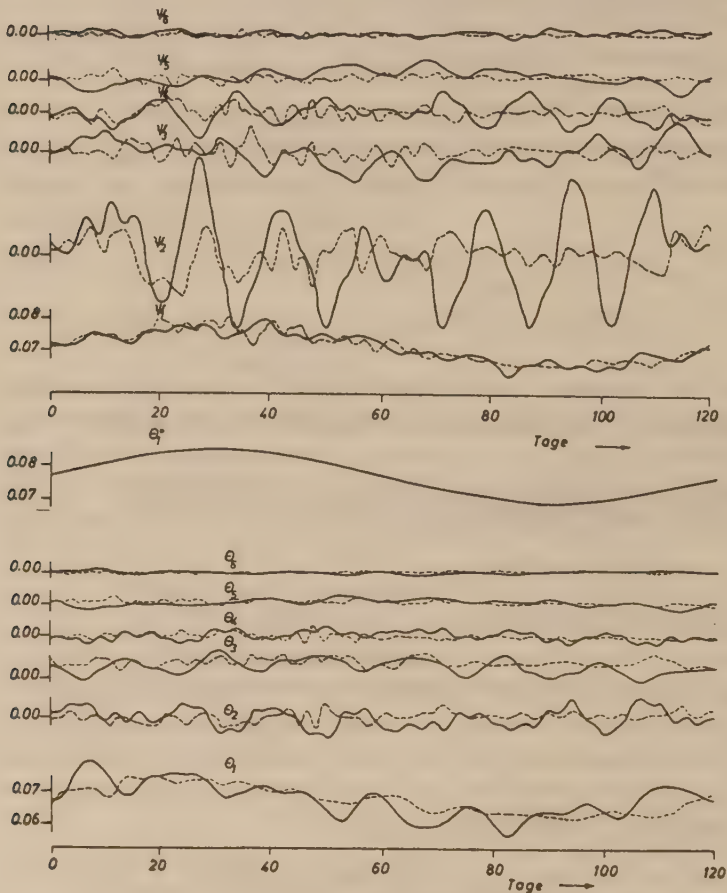


Abb. 12: Grundstromamplituden, $M = 6$, $N = 6$,
 $\Theta^T = 10/128$, $\Theta^{ns} = 1/128$. Zeitabhängige inhomogene
 Parametrisierungskoeffizienten.
 Relative Einheiten
 — zonal gemittelttes Modell
 - - - - - Vergleichsmodell

Hier fällt besonders die Diskrepanz zwischen den Lösungen des Vergleichsmodells und des zonal gemittelten Modells bei der Variablen ψ_2 auf: Der Verlauf von ψ_2 weist bei niedrigem Θ_1^* viel kleinere Zeitschwankungen auf als bei hohem Θ_1^* (Vergleichsmodell), während bei den Lösungen des parametrisierten Modells Amplituden und Frequenzen gleichbleiben. Die Änderung der Mittelwerte wird aber auch hier von dem linearen Modell gut erfaßt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß es gelungen ist, ein zonal gemitteltes Modell zu entwickeln, das in gewünschter Weise (den Trend betreffend) auf eine zeitlich sich ändernde Zwangsfunktion reagiert. Eine gute Simulation des Jahreszyklus - abgesehen von den kurzzeitigen Schwankungen - ist damit beispielsweise durchführbar. Weiterhin erscheint besonders die Anwendung des beschriebenen Verfahrens bei einem gekoppelten Modell Ozean-Atmosphäre sinnvoll. Als Zwangsfunktion, deren Schwankungsbreite vorzugeben ist, tritt in dem atmosphärischen Modell z.B. auch die Oberflächentemperatur des Ozeans auf. Nach Vorgabe eines ausreichend großen Schwankungsbereichs können dann im gleichen Maß, in dem sich die Oberflächentemperaturen ändern ("Output" des Ozeanmodells), die inhomogenen Parametrisierungskoeffizienten variiert werden. Damit ist eine korrekte Rückkopplung mit dem atmosphärischen Modell gewährleistet.

Eine Einschränkung für das Gelingen der Parametrisierung muß allerdings noch gemacht werden: Die Frequenz der Zwangsfunktion darf nicht mit einer der Eigenfrequenzen zusammenfallen, da sonst Resonanz auftritt. Ist zum Beispiel die Periode von Θ_1^* $T = 8,6$ Tage, so stimmt (bei Auflösung $M = 2$) die Störfrequenz genau mit einer Eigenfrequenz (Wellenzahl 14 in Abb. 6a) des Systems (III.4) überein. Die Resonanz macht sich

durch das lineare Anwachsen der Amplituden bemerkbar (Abb. 13).

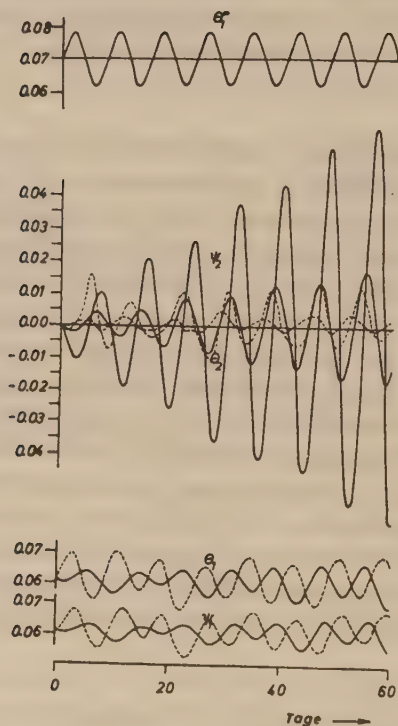


Abb. 13: Grundstromamplituden, Resonanzfall,
 $M = 2$, $N = 4$, $\theta_1^* = 9/128$, $\theta_2^* = 1/128$,
 $T = 8,6$ Tage. Relative Einheiten
 — zonal gemittelttes Modell
 - - - Vergleichsmodell

Die Gefahr, daß Resonanzerscheinungen bei einer konkreten Anwendung dieser Parametrisierungsmethode auftreten, ist relativ gering, da die zeitliche Größenordnung der Zwangsfunktion im allgemeinen größer als die des Eigenverhaltens der Atmosphäre ist. Zur Not (d.h. wenn Phänomene mit geringerer Schwankungsdauer untersucht werden) kann man sich auch dadurch behelfen, daß man bei der Auswahl der signifikanten Fourieramplituden des nichtlinearen Zeitlaufs die kleinen Frequenzen nicht berücksichtigt.

3. Zeitliche Änderung aller Parametrisierungskoeffizienten

Bisher ist es nicht gelungen, auch die erwünschte Frequenzänderung, die bei Änderung der Zwangsfunktion auftritt, zu simulieren. Für die Eigenfrequenzen eines linearen Differentialgleichungssystems sind die Koeffizienten des homogenen Systems verantwortlich, hier also die homogenen Parametrisierungskoeffizienten $\beta_{ij}^{\psi}, \beta_{ij}^{\theta}, \gamma_{ij}^{\psi}, \gamma_{ij}^{\theta}$. Im folgenden Versuch soll durch die zeitliche Änderung auch der homogenen Parametrisierungskoeffizienten eine Änderung der Eigenfrequenzen erzwungen werden. Ähnlich wie bei dem Verfahren, das im vorangehenden Abschnitt beschrieben wird, ist eine Anpassung der Koeffizienten an die Zwangsfunktion vorgesehen: Bei bekanntem Schwankungsbereich von Q_i^* werden für das jeweils konstante $Q_{i\max}^*$ und $Q_{i\min}^*$ nach der in Kapitel II.2 entwickelten Methode zwei komplette Sätze von Parametrisierungskoeffizienten berechnet. Damit erhält man den Schwankungsbereich der Koeffizienten. Innerhalb dieses Bereiches sollen die Koeffizienten der Zwangsfunktion folgend variieren.

Das Austesten dieses Verfahrens erfolgt wieder mit einer sinusförmigen Variation von Q_i^* . Es werden für die Grenzwerte $Q_{i\max}^* = 10/128$ und $Q_{i\min}^* = 8/128$ Koeffizientensätze berechnet und die dazwischenliegenden Werte für die Koeffizienten sinusförmig interpoliert. Das Verfahren erweist sich jedoch als Fehlschlag. Zwar gelingt es für kurze Modellzeit, eine ver-

nünftige Änderung der Mittelwerte und auch die gewünschte Frequenzänderung zu erhalten (Abb. 14a, Vergleichsrechnung: Abb. 2d), doch treten bald schon sehr große Amplituden auf, wie aus der Abb. 14b zu ersehen ist. Zur Erklärung dieses unerwünschten Verhaltens der Lösungen wird angenommen, daß die Schwankungsperiode T der Zwangsfunktion $\gg$ Periode der Kurzzeitschwankungen ist. Dann kann während einer gewissen Zeitspanne $\tilde{T}$, die groß gegenüber der Periode der Kurzzeitschwankungen, jedoch klein gegenüber T ist, die Zwangsfunktion und damit auch die Parametrisierungskoeffizienten als konstant angesehen werden. Eine solche Betrachtungsweise ermöglicht es, während der Zeit $\tilde{T}$ dem Problem bestimmte Eigenwerte zuzuordnen. Bei der Interpolation der Parametrisierungskoeffizienten treten nun offensichtlich auch solche Koeffizienten auf, deren Matrix komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindendem Realteil besitzt: $\lambda_e^{(r)} \neq 0$ (s. Kapitel II.2, Gleichung (II.6)). Dadurch hat das Differentialgleichungssystem vorübergehend, d.h. solange die Koeffizienten nicht nur rein imaginäre Eigenwerte hervorrufen, Lösungen der Form (II.6). Ein $\lambda_e^{(r)} > 0$ bewirkt ein Anwachsen der Amplituden. Besonders deutlich ist das zur Zeit $t = 110$ Tage in Abb. 14a und $t = 350$ Tage in Abb. 14b zu bemerken. Die Berechnung der Eigenwerte aus den homogenen Parametrisierungskoeffizienten zu diesem Zeitpunkt bestätigen die Vermutung: $\lambda_e^{(r)} > 0$. Natürlich können auch Eigenwerte mit $\lambda_e^{(r)} < 0$ auftreten, das hätte dann eine Dämpfung der Amplituden zur Folge. Nun läßt die Vergleichsrechnung (Abb. 2d) allerdings auch eine Amplitudenmodulation erkennen. Ein Anwachsen der Amplituden mit wachsendem Θ_n^* und eine Abnahme mit abnehmendem Θ_n^* wäre also ein Effekt, den das zonal gemittelte Modell simulieren sollte. Das heißt, daß vorübergehend auftretende Eigenwerte mit nicht verschwindendem Realteil durchaus erwünscht sind. Die Interpolation liefert jedoch keine Bedingung, die genau die erwünschte Koeffizientenmatrix und damit die Eigenwerte erzwingt. Folglich kann mit dieser Methode eine Simulation der Lösungen des Vergleichsmodells nicht gelingen.

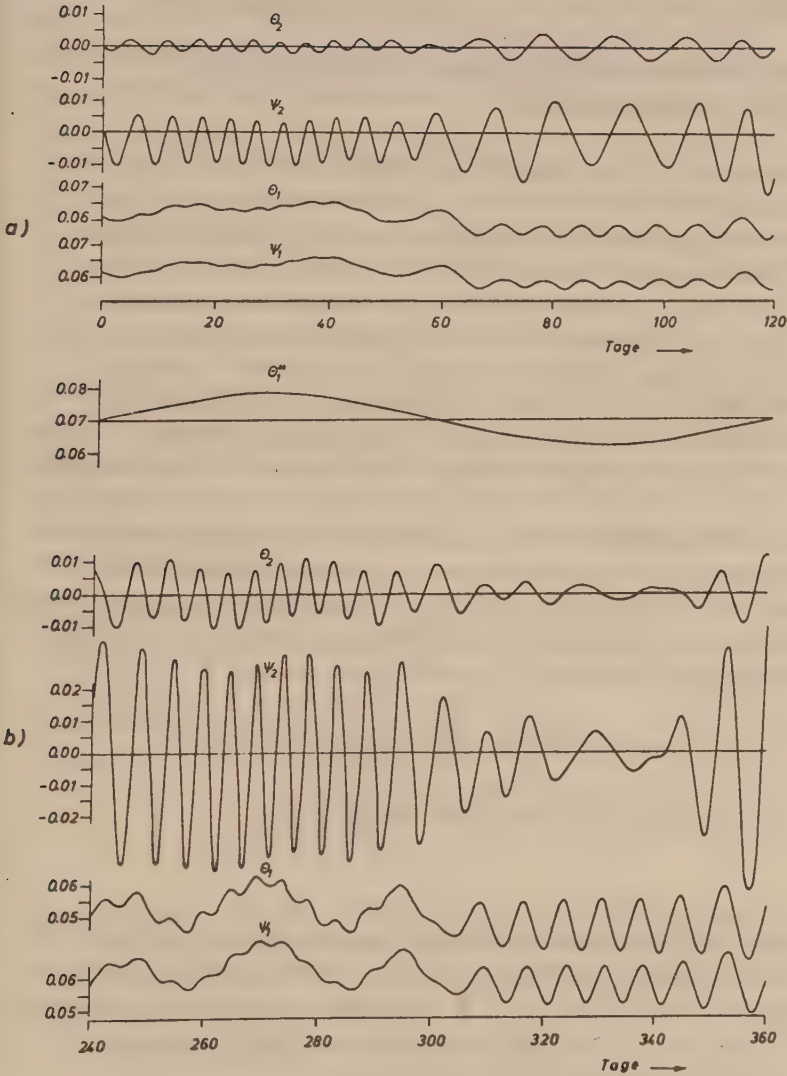


Abb.14: Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$,
 $\bar{\theta}_1^* = 9/128$, $\theta_1^{*s} = 1/128$. Alle Parametrisierungs-
koeffizienten sind zeitabhängig. Relative Einheiten.

IV. Parametrisierung mit Hilfe eines Austauschansatzes

1. Der Austauschansatz im quasi-geostrophischen Zwei-Schichten-Modell

Wie schon in der Einleitung erwähnt wird, basiert die konventionelle Methode zur Parametrisierung makroturbulenter Transporte auf dem Austauschkonzept. Es werden dabei die turbulenten Transporte proportional zum Gradienten der mittleren transportierten Größe gesetzt. Hier soll nun versucht werden, einen Vergleich zwischen dem in dieser Arbeit benutzten allgemeinen linearen Parametrisierungsansatz und dem Austauschansatz, der ja ebenfalls einen linearen Zusammenhang zwischen Transporten und transportierten Größen herstellt, anzustellen.

Die konservative Größe, auf die - mit gewisser Berechnung - der Austauschansatz angewendet werden kann, ist im vorliegenden Modell die quasi-geostrophische potent. Vorticity. Sie soll in der oberen Schicht mit Q_o in der unteren Schicht mit Q_u bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} Q_o &= \nabla^2(\psi + \tau) + f_o - \frac{B f_o}{G_o} \tau \\ Q_u &= \nabla^2(\psi - \tau) + f_o + \frac{B f_o}{G_o} \tau \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß Q_o und Q_u in den entsprechenden Schichten konservative Größen im adiabatischen und reibungsfreien Fall sind. Bildet man nämlich die Summe und die Differenz der Modellgleichungen (I.7a) und (I.7b) und vernachlässigt die Heizungs- und Reibungsterme, so folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_o}{\partial t} + J(\psi + \tau, Q_o) &= 0 \\ \frac{\partial Q_u}{\partial t} + J(\psi - \tau, Q_u) &= 0 \end{aligned}$$

Wenn mit $(\overline{\quad})^x$ die zonale Mittelung gekennzeichnet wird, so lautet der Austauschansatz für beide Schichten (s. auch Sela und Wiin-Nielsen, 1971):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\psi+\tau)}{\partial x} Q_{\sigma} &= -A_{\sigma} \frac{\partial Q_{\sigma}}{\partial y} \\ \frac{\partial(\psi-\tau)}{\partial x} Q_u &= -A_u \frac{\partial Q_u}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{IV.2})$$

mit A_{σ} = Austauschkoeff. der oberen Schicht

A_u = Austauschkoeff. der unteren Schicht .

Bei den in Kapitel II parametrisierten Advektionstermen handelt es sich nun aber nicht um die makroturbulenten Transporte selber (linke Seite von (IV.2)), sondern um ihre Divergenz. Die Advektionsterme in Gleichung (I.7) sind nämlich bei Beachtung von (I.4) und nach zonaler Mittelbildung

$$\begin{aligned}\overline{f(\psi, \nabla^2 \psi) + f(\tau, \nabla^2 \tau)}^x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \psi}^x + \overline{\frac{\partial \tau}{\partial x} \nabla^2 \tau}^x \right) \\ \overline{f(\psi, \nabla^2 \tau) + f(\tau, \nabla^2 \psi)} - \frac{\overline{B f_o}}{\overline{G_o}} \overline{f(\psi, \tau)}^x &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \tau}^x + \overline{\frac{\partial \tau}{\partial x} \nabla^2 \psi}^x - \frac{\overline{B f_o}}{\overline{G_o}} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x} \tau}^x \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.3})$$

Um für die Advektionsterme (rechte Seite von (IV.3)) den passenden Gradientansatz zu machen, müssen nun die meridionalen Ableitungen von (IV.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial(\psi+\tau)}{\partial x} Q_{\sigma}} \right)^x &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(A_{\sigma} \overline{\frac{\partial Q_{\sigma}}{\partial y}} \right)^x \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial(\psi-\tau)}{\partial x} Q_u} \right)^x &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(A_u \overline{\frac{\partial Q_u}{\partial y}} \right)^x\end{aligned}\quad (\text{IV.4})$$

und von diesen dann - entsprechend der Herleitung der Modellgleichungen (I.7) - das vertikale Mittel und die vertikale Differenz

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial(\psi+\tau)}{\partial x} Q_\sigma} + \overline{\frac{\partial(\psi-\tau)}{\partial x} Q_u} \right)^x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_\sigma \frac{\partial \overline{Q_\sigma}^x}{\partial y} + A_u \frac{\partial \overline{Q_u}^x}{\partial y} \right) \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial(\psi+\tau)}{\partial x} Q_\sigma} - \overline{\frac{\partial(\psi-\tau)}{\partial x} Q_u} \right)^x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(A_\sigma \frac{\partial \overline{Q_\sigma}^x}{\partial y} - A_u \frac{\partial \overline{Q_u}^x}{\partial y} \right)$$

gebildet werden. Durch Einsetzen von (IV.1) in (IV.5) kann man leicht zeigen, daß die linken Seiten von (IV.5) identisch mit den rechten Seiten von (IV.3) sind, also den zu parametrisierenden Advektionstermen entsprechen. Wenn man noch definiert

$$\frac{A_\sigma + A_u}{2} \equiv A \quad \text{und} \quad \frac{A_\sigma - A_u}{2} \equiv A', \quad \text{so wird}$$

(IV.3) mit (IV.5):

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) + \mathcal{J}(\tau, \nabla^2 \tau)}^x &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial}{\partial y} \overline{\nabla^2 \psi}^x + A' \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\nabla^2 \tau - \frac{B f_0}{G_0} \tau} \right)^x \right) \\ \overline{\mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \tau) + \mathcal{J}(\tau, \nabla^2 \psi) - \frac{B f_0}{G_0} \mathcal{J}(\psi, \tau)}^x &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\nabla^2 \tau - \frac{B f_0}{G_0} \tau} \right)^x + A' \frac{\partial}{\partial y} \overline{\nabla^2 \psi}^x \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Mit (IV.6) ist also ein Ansatz für die Advektionsterme des vorliegenden Modells gegeben, wenn für den Transport quasi-geostrophischer potentieller Vorticity ein Austauschansatz gemacht wird.

2. Spektrale Darstellung des Austauschansatzes

Die spektrale Entwicklung der Variablen ist durch (I.15) gegeben. Unter Verwendung der Gleichungen (I.12) bis (I.16) werden die linken Seiten von (IV.6):

$$\overline{\gamma(\psi, \nabla^2 \psi) + \gamma(\tau, \nabla^2 \tau)}^X = \quad (IV.7)$$

$$= f_0^2 \sum_{i=1}^M \phi_i \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I (a_j^2 - a_k^2) c_{ijk} (\psi_j \psi_k + \tau_j \tau_k)$$

$$\overline{\gamma(\psi, \nabla^2 \tau) + \gamma(\tau, \nabla^2 \psi) + \frac{B f_0}{\epsilon_0} \gamma(\psi, \tau)}^X =$$

$$= f_0^2 \sum_{i=1}^M \phi_i \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I c_{ijk} \left[(a_j^2 - a_k^2 + \frac{1}{\epsilon_{00}}) \tau_j \psi_k + (a_j^2 - a_k^2 - \frac{1}{\epsilon_{00}}) \psi_j \tau_k \right]$$

Da die Austauschkoeffizienten die Dimension einer Stromfunktion haben und nur von y abhängen, wird für sie angesetzt

$$A = L^2 f_0 \sum_{i=1}^M A_i \phi_i \quad (IV.8)$$

$$A' = L^2 f_0 \sum_{i=1}^M A'_i \phi_i$$

Weiterhin ergibt sich mit der folgenden Definition

$$\delta_{ijk} \equiv L^2 \phi_i \overline{\frac{\partial}{\partial y} (\phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y})}^y \quad (IV.9)$$

der in (IV.6) auftretende Operator zu

$$\frac{\partial}{\partial y} (\phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^M \delta_{ijk} \phi_i \quad (IV.10)$$

Unter Berücksichtigung von (I.12, 15 u. 16) und (IV.8-10) lassen sich die rechten Seiten von (IV.6) in spektraler Darstellung schreiben

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial}{\partial y} \overline{\nabla^2 \psi}^x + A' \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 \tau - \frac{\mathcal{B}_0^2}{\mathcal{G}_0} \tau \right)^x \right) = \\
 & = \int_0^2 \sum_{i=1}^M \phi_i \sum_{j,k=1}^M \delta_{ijk} (a_j^2 \psi_j A_k + a_j^2 \tau_j A'_k + \frac{1}{\mathcal{G}_0} \tau_j A'_k) \quad (\text{IV.11}) \\
 & -\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 \tau - \frac{\mathcal{B}_0^2}{\mathcal{G}_0} \tau \right)^x + A' \frac{\partial}{\partial y} \overline{\nabla^2 \psi}^x \right) = \\
 & = \int_0^2 \sum_{i=1}^M \phi_i \sum_{j,k=1}^M \delta_{ijk} (a_i^2 \psi_j A'_k + a_i^2 \tau_j A_k + \frac{1}{\mathcal{G}_0} \tau_j A_k)
 \end{aligned}$$

Die einzelnen spektralen Komponenten des Ansatzes (IV.6) folgen nach Gleichsetzen der rechten Seiten von (IV.7) und (IV.11) durch Multiplikation mit ϕ_i und Mittelung über y . Mit Beachtung von (I.8) lautet dann der Ansatz

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \bar{a}_i^{-2} (a_j^2 - a_k^2) c_{ijk} (\psi_j \psi_k + \tau_j \tau_k) = \\
 & = \sum_{j,k=1}^M \bar{a}_i^{-2} \delta_{ijk} (a_j^2 \psi_j A_k + a_j^2 \tau_j A'_k + \frac{1}{\mathcal{G}_0} \tau_j A'_k) \quad (\text{IV.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[c_{ijk} \frac{\mathcal{G}_0 (a_j^2 - a_k^2) + 1}{\mathcal{G}_0 a_i^2 + 1} \tau_j \psi_k + c_{ijk} \frac{\mathcal{G}_0 (a_j^2 - a_k^2) - 1}{\mathcal{G}_0 a_i^2 + 1} \psi_j \tau_k \right] = \\
 & = \sum_{j,k=1}^M \frac{\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_0 a_i^2 + 1} \delta_{ijk} (a_j^2 \psi_j A'_k + a_j^2 \tau_j A_k + \frac{1}{\mathcal{G}_0} \tau_j A_k)
 \end{aligned}$$

Da $\tau_i = \theta_i$, sind die linken Seiten von (IV.12) die durch (II.2) definierten Advektionsterme. (IV.12) kann also nach Aufspaltung der rechten Seiten geschrieben werden

$$\text{ADVEKTION}(\psi_i) =$$

$$\begin{aligned} &= a_i^{-2} \sum_{j=1}^M a_j^2 \psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + a_i^{-2} \sum_{j=1}^M \left(a_j^2 + \frac{1}{\sigma_{\infty}}\right) \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^M R_{ij}^{\psi} \psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\psi} \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k \end{aligned}$$

(IV.13)

$$\text{ADVEKTION}(\theta_i) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_{\infty} a_i^2 + 1} \sum_{j=1}^M a_j^2 \psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k + \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_{\infty} a_i^2 + 1} \sum_{j=1}^M \left(a_j^2 + \frac{1}{\sigma_{\infty}}\right) \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^M R_{ij}^{\theta} \psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\theta} \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\psi} &\equiv a_i^{-2} a_j^2, & S_{ij}^{\psi} &\equiv a_i^{-2} \left(a_j^2 + \frac{1}{\sigma_{\infty}}\right) \\ R_{ij}^{\theta} &\equiv \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_{\infty} a_i^2 + 1} a_j^2, & S_{ij}^{\theta} &\equiv \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_{\infty} a_i^2 + 1} \left(a_j^2 + \frac{1}{\sigma_{\infty}}\right) \end{aligned}$$

Konstanten sind, die nur von der Wahl der Orthogonalfunktionen abhängen. Dasselbe gilt für δ_{ijk} . Die Modellgleichungen für das zonal gemittelte Modell, in dem die makroturbulenten Transporte

von quasi-geostrophischer potentieller Vorticity durch einen Gradientansatz angenähert werden, lauten nun (Gleichungen (II.3) mit Ansatz (IV.13)):

$$\dot{\Psi}_i = \sum_{j=1}^M R_{ij}^{\Psi} \Psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\Psi} \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k - k_0 (\Psi_i - \theta_i) \quad (\text{IV.14})$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \sum_{j=1}^M R_{ij}^{\theta} \Psi_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\theta} \theta_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + \\ & + X_i \Psi_i - Y_i \theta_i + Z_i \theta_i^* \end{aligned} \quad i = 1, \dots, M$$

3. Lösungen und Diskussion der Ergebnisse

Die im Ansatz (IV.13) unbekannten Parametrisierungskoeffizienten sind die jeweils M Fourierkoeffizienten von A und A'. Zur Bestimmung dieser 2M Koeffizienten nach der in Kapitel (II.2) beschriebenen Methode werden 2M Gleichungen benötigt. Das erfordert allerdings, daß man sich bei dem vorzugebenden Lösungstyp (Gleichung (II.6)) auf den konstanten Term beschränken muß. Man wird also lediglich die Mittelwerte der spektralen Grundstromamplituden zur Berechnung der Koeffizienten heranziehen können, indem man als Lösung für (IV.14) ansetzt:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \bar{\Psi}_i \\ \theta_i &= \bar{\theta}_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, M \quad (\text{IV.15})$$

Einsetzen von (IV.15) in (IV.14) liefert die Bestimmungsgleichungen für die A_k und A'_k :

$$\sum_{j=1}^M R_{ij}^{\Psi} \bar{\Psi}_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\Psi} \bar{\theta}_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k - k_0 (\bar{\Psi}_i - \bar{\theta}_i) = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$\sum_{j=1}^M R_{ij}^{\theta} \bar{\Psi}_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A'_k + \sum_{j=1}^M S_{ij}^{\theta} \bar{\theta}_j \sum_{k=1}^M \delta_{ijk} A_k + X_i \bar{\Psi}_i - Y_i \bar{\theta}_i + Z_i \bar{\theta}_i^* = 0$$

Für $M = 2$ und mit $\theta_1^* = 9/128$ erhält man

$$A_1 = -0,58 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = -0,18 \cdot 10^{-1}$$

$$A_1' = 0,31 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2' = 0,69 \cdot 10^{-3}$$

Der bei weitem größte Fourierkoeffizient ist also A_2 , was darauf hindeutet, daß der vertikal gemittelte Austauschkoefizient A ein Maximum in der Mitte des Kanals hat (man beachte IV.8 und $\phi_2 = F_{02} = \sqrt{2} \cos 2\eta/L$). Dies ist in Übereinstimmung mit beobachteten Werten. Wiin-Nielsen und Sela (1971) finden das Maximum des Austauschkoefizienten für die quasi-geostrophische potentielle Vorticity bei 55° geographischer Breite.

Integriert man nun das System (IV.14) mit konstantem θ_1^* und mit den für das gleiche θ_1^* berechneten A_h und A_h' , so zeigt sich erwartungsgemäß, daß die ψ_i und θ_i zeitunabhängig sind: $\psi_i = \bar{\psi}_i$, $\theta_i = \bar{\theta}_i$.

Die Lösungen für $M = 2$ bei Verwendung der gleichen Austauschkoefizienten, aber zeitabhängigem θ_1^* (nach (I.19) mit

$\theta_1^{*c} = 1/128$), werden in Abb. 15 gezeigt. Auf den ersten Blick scheinen ψ_2 und θ_2 von θ_1^* nicht beeinflußt zu werden, sie unterliegen jedoch auch geringen Schwankungen, die nur wegen der Zeichengenauigkeit nicht erkennbar sind. Ein Vergleich mit den Lösungen des nichtlinearen Modells (in Abb. 15 gestrichelt dargestellt) läßt erkennen, daß mit dem Austauschansatz die Reaktion des Grundstroms auf die Änderung der Zwangsfunktion überschätzt wird. Noch deutlicher wird dieses, wenn die Variation von θ_1^* verstärkt wird: $\theta_1^{*s} = 2/128$ (Abb. 16). Zwar ist dieses Fehlverhalten bei weitem nicht so gravierend wie bei Verwendung der in dieser Arbeit entwickelten Parametrisierungsmethode mit konstanten Koeffizienten (vgl. Abb. 9), doch wird auch hier

klar, daß mit konstanten Austauschkoeffizienten keine quantitativ richtige Änderung des Grundstroms erzwungen werden kann. Diese Aussage wird durch die Resultate von Sela und Wiin-Nielsen (1971) belegt. Ihr Versuch einer Simulation des Jahreszyklus' der Energien mit einem linearen Modell mit zeitlich konstanten Austauschkoeffizienten liefert viel zu große jahreszeitliche Schwankungen der Temperaturen und des Windes und damit auch der Energien.

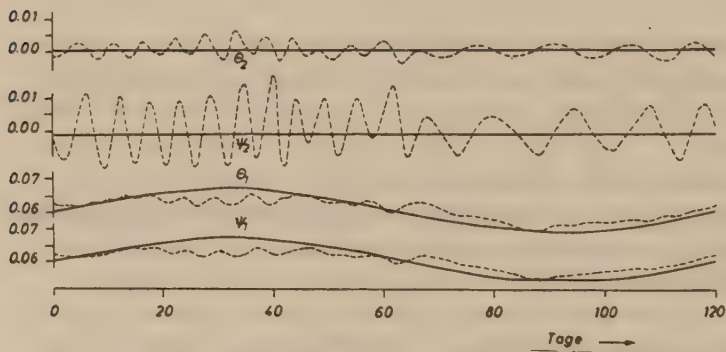


Abb.15: Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$, $\overline{\theta_1^*} = 9/128$
 $\theta_1^{*s} = 1/128$. Relative Einheiten,

———— zonal gemittelttes Modell (mit Austausch-
 ansatz)
 ----- Vergleichsmodell

Allerdings führen die Autoren diesen Effekt auf eine physikalisch zu einfache Wärmequelle zurück. In einer weiterführenden Arbeit (Wiin-Nielsen und Fuenzalida, 1975) wird eine komplexere Wärmequelle verwendet, die auch die Verdunstung, Kondensation und den Wärmefluß durch den Boden berücksichtigt. Tatsächlich erzielen Wiin-Nielsen u. Fuenzalida dadurch wesentlich bessere Ergebnisse. Nach den in der vorliegenden Ar-

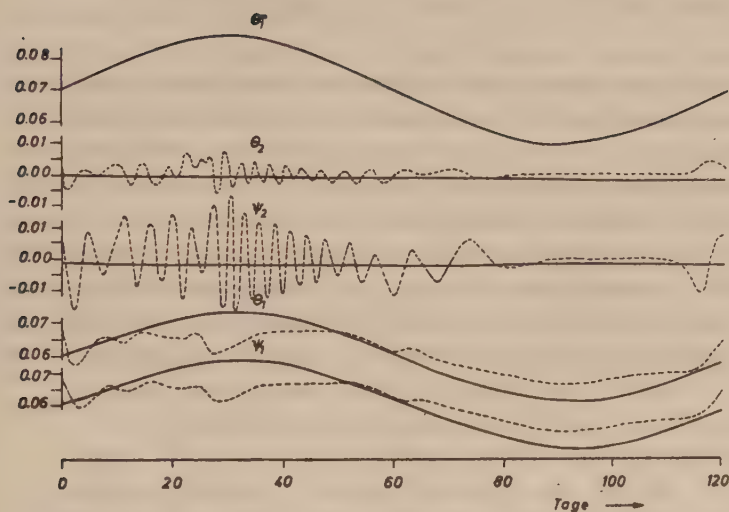


Abb. 16: Grundstromamplituden, $M = 2$, $N = 4$,
 $\bar{\theta}_1^* = 9/128$, $\theta_1^{*s} = 2/128$. Relative Einheiten.
 — zonal gemittelttes Modell (mit Austauschansatz)
 ----- Vergleichsmodell

beit gewonnenen Erkenntnissen erscheint es jedoch nicht zwingend, daß selbst eine optimale Modellierung der Zwangsfunktion - bei Verwendung linearer Parametrisierungsmethoden mit konstanten Koeffizienten - zum Erfolg führt. Dies zeigt die in Kapitel III.1 beschriebene mißlungene Simulation mit einer zeitabhängigen Zwangsfunktion, die ja exakt mit der Zwangsfunktion des zur Verifikation herangezogenen Zirkulationsmodells übereinstimmt. Erst die Korrektur der inhomogenen Parametrisierungskoeffizienten, die ebenso gut als Korrektur der Zwangsfunktion aufgefaßt werden kann (Kapitel III.2), erzwingt eine wenigstens im Zeitmittel richtige Simulation der Grundstromschwankungen. Es liegt also die paradoxe Situation vor, daß für eine gute Simulation eine realistische Modellierung der Zwangsfunktion gar nicht wünschenswert ist.

Das Gesagte bezieht sich allerdings nur auf lineare Parametrisierungen bei Gebrauch konstanter Koeffizienten.

Die Bestimmung der Austauschkoeffizienten mit (IV.16) ist nicht immer durchführbar. Das Differentialgleichungssystem (IV.14) besteht aus $2M$ linearen Gleichungen. Das dazugehörige Lösungssystem setzt sich also aus $2M$ Partikularintegralen mit verschiedenen Eigenwerten zusammen. Da aber zur Berechnung der Austauschkoeffizienten lediglich die Forderung (IV.15) gestellt werden kann, ist über die Eigenwerte der Lösungen noch nichts ausgesagt. Es können also durchaus Lösungen der Form (II.6) auftreten mit $\lambda_R > 0$ und/oder $\lambda_i^{(\tau)} > 0$. Sobald dann z.B. aufgrund numerischer Fehler - oder wegen einer nicht mehr konstanten Störfunktion - die erzwungene Lösung gestört wird, so daß $\psi_i \neq \bar{\psi}_i$ und $\theta_i \neq \bar{\theta}_i$, werden die positiv reellen Eigenwerte ein exponentielles Anwachsen der Lösungen hervorrufen. An diesem Problem scheiterten beispielsweise die Rechnungen mit $M = 6$. Ein solches Mißlingen ist nicht vermeidbar. Auch diejenigen linearen Modelle, in denen aus Beobachtungen gewonnene Austauschkoeffizienten benutzt werden, können instabile Lösungen haben. In einem solche Fall wäre man also gezwungen, durch Variation der Koeffizienten die Koeffizientenmatrix oder Modellgleichungen dahingehend zu korrigieren, daß sie Eigenwerte mit negativem Realteil liefert.

Da es keine Bedingung gibt, die die Eigenwerte festlegt - weder für die "beobachteten" Austauschkoeffizienten, noch für die berechnete Koeffizientenmatrix - können sich die Lösungen der linearen Gleichungen stabil, instabil oder neutral verhalten. Der unbrauchbare instabile Fall wird durch die oben erwähnte Korrektur der Koeffizienten ausgeschlossen. Wenn man noch von dem Zufall absieht, daß die Koeffizientenmatrix rein imaginäre Eigenwerte hat, also genau der neutrale Fall (Form der Lösung: (II.7)) eintritt, so kann das mit Hilfe des Austauschansatzes parametrisierte Modell letztlich nur stabile Lösungen haben. Das heißt, daß eventuell am Anfang vorhandene

Oszillationen, deren Frequenzen im allgemeinen aber nicht mit den beobachteten bzw. zu simulierenden Frequenzen übereinstimmen, ausgedämpft werden. Dies ist der Grund dafür, daß es bei Verwendung des Austauschansatzes keine kurzzeitigen Schwankungen gibt. Bei den hier durchgeführten Rechnungen (Abb. 15 und 16) können wegen der hier gewählten Anfangsbedingungen $\psi_i = \overline{\psi}_i$ und $\theta_i = \overline{\theta}_i$ erst gar keine Schwingungen auftreten. Auch die Ergebnisse von Sela und Wiin-Nielsen (1971) zeigen einen glatten Verlauf des Jahresganges im zweiten Jahr (Modellzeit), nachdem also anfängliche Störungen schon herausgedämpft sind.

V. Energiebetrachtungen

Es sollen hier vergleichende Betrachtungen der Energetik des parametrisierten Modells und des Zirkulationsmodells angestellt werden. Zuvor werden kurz die Energiegleichungen abgeleitet.

1. Energiezyklus im dreidimensionalen Modell

Energieumwandlungen können im vorliegenden Modell zwischen kinetischer Energie und verfügbarer potentieller Energie stattfinden, wobei in der verfügbaren potentiellen Energie auch der Anteil der inneren Energie enthalten ist. In spektraler Form läßt sich das räumliche Mittel der kinetischen Energie schreiben

$$K = \frac{c}{2} \left[\sum_{i=1}^M \alpha_i^2 (\psi_i^2 + \theta_i^2) + \sum_{i=M+1}^I \alpha_i^2 (\psi_i^2 + \theta_i^2) \right] \equiv K_z + K_E \quad (V.1a)$$

mit dem Skalenfaktor $c = \rho \cdot L^2 f^2 / g$
(g = Erdbeschleunigung). K_z ist die kinetische Energie der Zonalströmung, K_E die kinetische Energie der Störungen (Abweichungen vom zonalen Mittel). Die verfügbare potentielle Energie ist (vgl. Fleming, 1971)

$$P = \frac{c}{2G_0} \left[\sum_{i=1}^M \theta_i^2 + \sum_{i=M+1}^I \theta_i^2 \right] \equiv P_z + P_E \quad (V.1b)$$

Es handelt sich um die spektrale Version der von Lorenz (1960) näherungsweise angegebenen verfügbaren potentiellen Energie eines Zwei-Schichten-Modells. Auch P setzt sich zusammen aus einem zonalen Anteil P_z und einem Störungsanteil P_E . Die Energiegleichungen folgen aus (V.1)

$$\dot{K} = c \sum_{i=1}^I a_i^2 (\psi_i \dot{\psi}_i + \theta_i \dot{\theta}_i)$$

$$\dot{P} = \frac{c}{G_{\infty}} \sum_{i=1}^I \theta_i \dot{\theta}_i$$

und lauten mit (I.17)

$$\frac{dK}{dt} = f_0 \dot{K} = \quad (V.2a)$$

$$= c f_0 \sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[\psi_i (a_i^2 - a_k^2) c_{ij,k} (\psi_j \psi_k + \theta_j \theta_k) + \theta_i (a_i^2 - a_k^2) c_{ij,k} (\theta_j \psi_k + \psi_j \theta_k) \right] \right. \\ \left. - k_0 a_i^2 \psi_i (\psi_i - \theta_i) - \theta_i \omega_i + k_0 a_i^2 \theta_i \psi_i - (k_0 + 2k'_0) a_i^2 \theta_i^2 \right\}$$

$$\frac{dP}{dt} = f_0 \dot{P} = \quad (V.2b)$$

$$= \frac{c f_0}{G_{\infty}} \sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I \left[\theta_i c_{ij,k} (\theta_j \psi_k - \psi_j \theta_k) \right] + G_{\infty} \theta_i \omega_i - h_0 \theta_i (\theta_i - \theta_i^*) \right\}$$

Hierin sind die ω_i die Fourierkoeffizienten von $\nabla^2 \hat{\chi}$,
ein Maß für die Vertikalgeschwindigkeit in der Fläche
zwischen den beiden Modellschichten:

$$\nabla^2 \hat{\chi} = f_0 \sum_{i=1}^I \omega_i \phi_i$$

ω_i ergibt sich aus der spektralen Version der Vorticity-
gleichung für die Scherströmung (I.6b) und der thermodyna-
mischen Gleichung (I.6c), wenn man beachtet, daß $\tau_i = \theta_i$:

$$\omega_i = \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^I \left\{ \frac{C_{ijk}}{G_{00} a_i^2 + 1} [(a_j^2 - a_k^2) - a_i^2] \theta_j \psi_k + \frac{C_{ikj}}{G_{00} a_i^2 + 1} [(a_j^2 - a_k^2) + a_i^2] \psi_j \theta_k \right\} +$$

$$+ \frac{k_0 a_i^2}{G_{00} a_i^2 + 1} \psi_i - \frac{a_i^2 (k_0 + 2k'_0) - a_i^2 h_0}{G_{00} a_i^2 + 1} \theta_i - \frac{h_0 a_i^2}{G_{00} a_i^2 + 1} \theta_i^* \quad (V.3)$$

Die einzelnen Terme der Energiegleichungen haben folgende Bedeutung:

$$G(P) \equiv G(P_2) + G(P_E) =$$

(V.4a)

$$= \frac{c \ell_0}{G_{00}} \left[\sum_{i=1}^M h_0 \theta_i (\theta_i^* - \theta_i) + \sum_{i=M+1}^I h_0 \theta_i (\theta_i^* - \theta_i) \right]$$

ist die Erzeugung verfügbarer potentieller Energie durch differentielle Erwärmung und

$$\mathcal{D}(K) \equiv \mathcal{D}(K_2) + \mathcal{D}(K_E) =$$

(V.4b)

$$= c \ell_0 \left[\sum_{i=1}^M (k_0 a_i^2 (\psi_i - \theta_i)^2 + 2k'_0 a_i^2 \theta_i^2) + \sum_{i=M+1}^I (k_0 a_i^2 (\psi_i - \theta_i)^2 + 2k'_0 a_i^2 \theta_i^2) \right]$$

die Dissipation kinetischer Energie durch Reibung. Gleichlautende Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen in (V.2a) und (V.2b) beschreiben den Energieübergang zwischen potentieller und kinetischer Energie:

$$\begin{aligned}
 C(PK) &\equiv C(P_z K_z) + C(P_E K_E) \\
 &= -C f_0 \left[\sum_{i=1}^M \theta_i \omega_i + \sum_{i=M+1}^I \theta_i \omega_i \right]
 \end{aligned} \tag{V.5}$$

Der Energieaustausch zwischen zonaler und Störungsenergie geschieht durch nichtlineare Wechselwirkung zwischen Grundstrom und Störungen. Dafür verantwortlich sind die Terme in den eckigen Klammern in (V.2):

$$C(P_z P_E) = -\frac{C f_0}{G_{00}} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I [c_{ijh} \theta_i (\theta_j \psi_k - \psi_j \theta_k)] \tag{V.6}$$

$$\begin{aligned}
 C(K_z K_E) &= \\
 &= C f_0 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^I (a_j^2 - a_k^2) c_{ijh} [\psi_i (\psi_j \psi_k + \theta_j \theta_k) + \theta_i (\theta_j \psi_k - \psi_j \theta_k)]
 \end{aligned}$$

Mit diesen Abkürzungen lassen sich die Energiegleichungen nach Aufspaltung in Bilanzgleichungen für Grundstrom- und Störungsenergie wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_z}{dt} &= -C(P_z P_E) - C(P_z K_z) && + G(P_z) \\
 \frac{dP_E}{dt} &= C(P_z P_E) && - C(P_E K_E) && + G(P_E) \\
 \frac{dK_z}{dt} &= C(P_z K_z) && + C(K_z K_E) && - D(K_z) \\
 \frac{dK_E}{dt} &= && C(P_E K_E) - C(K_z K_E) && - D(K_E)
 \end{aligned} \tag{V.7}$$

Der Energiezyklus wird in Abb. 17 schematisch verdeutlicht. Die Pfeile geben die Richtung der Energieübergänge, der Produktion und Dissipation von Energie an, wie sie durch Rechnung mit der Auflösung (2,4) gefunden werden. Die zeitlich gemittelte Zahlenwerte für verschiedene θ_i^* sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

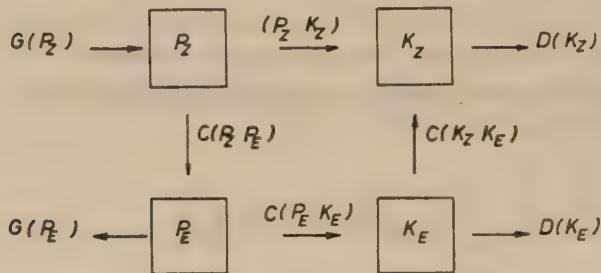


Abb. 17: Energiezyklus im Zirkulationsmodell. Auflösung(2,4)

Durch Erwärmung der wärmeren Luft im Süden und Abkühlung der kälteren Luft im Norden des Kanals ($\theta_i^* > \theta_i$) wird fortwährend zonale verfügbare potentielle Energie erzeugt: $G(P_z) > 0$. Ein Teil von P_z wird durch Wärmetransport entgegen dem Temperaturgradienten in potentielle Energie der Störungen umgewandelt (barokline Entwicklung: $C(P_z P_E) > 0$). Ein anderer Teil geht durch Hebung wärmerer Luft und Absinken kälterer Luft in kinetische Energie der Zonalströmung über: $C(P_z K_z) > 0$. Durch Erwärmung kälterer Luft der Störungen (im Süden) und Abkühlung wärmerer Luft der Störungen (im Norden) wird potentielle Energie der Störungen abgegeben. Dies wird im Modell erreicht, weil $\theta_i^* = 0$ für $i > M$, so daß $G(P_E) < 0$. Der Energieaustausch zwischen P_E und K_E geschieht durch Hebung wärmerer Luft und Absinken kälterer Luft in den Störungen: $C(P_E K_E) > 0$. K_E wird zum Teil durch Reibung vernichtet: $D(K_E) > 0$, zum Teil durch Impulstransport, der in Richtung des Gradienten der Zonalgeschwindigkeit verläuft, in

kinetische Energie der Grundströmung umgewandelt: $C(K_z K_E) > 0$.
Die Reibung sorgt wieder für die Vernichtung von K_z : $D(K_z) > 0$.

Aus Tabelle 1, ist zu ersehen, daß der bei weitem größte Anteil der Energie in Form von verfügbarer potentieller Energie vorhanden ist.

	$\Theta_n^* = 8/128$	$\Theta_n^* = 9/128$	$\Theta_n^* = 10/128$
P_z	10,77	12,27	13,67
P_E	0,15	0,48	0,75
K_z	0,85	0,98	1,10
K_E	0,54	1,10	1,99
$G(P_z)$	23,82	44,05	68,48
$G(P_E)$	-3,55	-11,14	-17,55
$D(K_z)$	10,10	11,67	13,14
$D(K_E)$	9,01	18,99	33,98
$C(P_z P_E)$	11,96	29,00	48,08
$C(K_z K_E)$	0,18	0,39	0,56
$C(P_z K_z)$	9,95	11,35	12,69
$C(P_E K_E)$	8,56	18,19	32,16

Tabelle 1:

Energien, Erzeugung, Dissipation und Energieübergänge des Zirkulationsmodells, gemittelt über einen Zeitraum von 120 Tagen. $M = 2$, $N = 4$. Relative Einheiten.

Dieses wird durch Beobachtungen bestätigt. Weiterhin sind $G(P_z)$ und $C(P_z P_E)$ von der gleichen Größenordnung, wohingegen $C(K_z K_E)$ zwei Größenordnungen kleiner ist. Bei Lorenz (1955) findet man eine zumindest grobe Übereinstimmung mit den genannten Relationen zwischen den Energieumwandlungen.

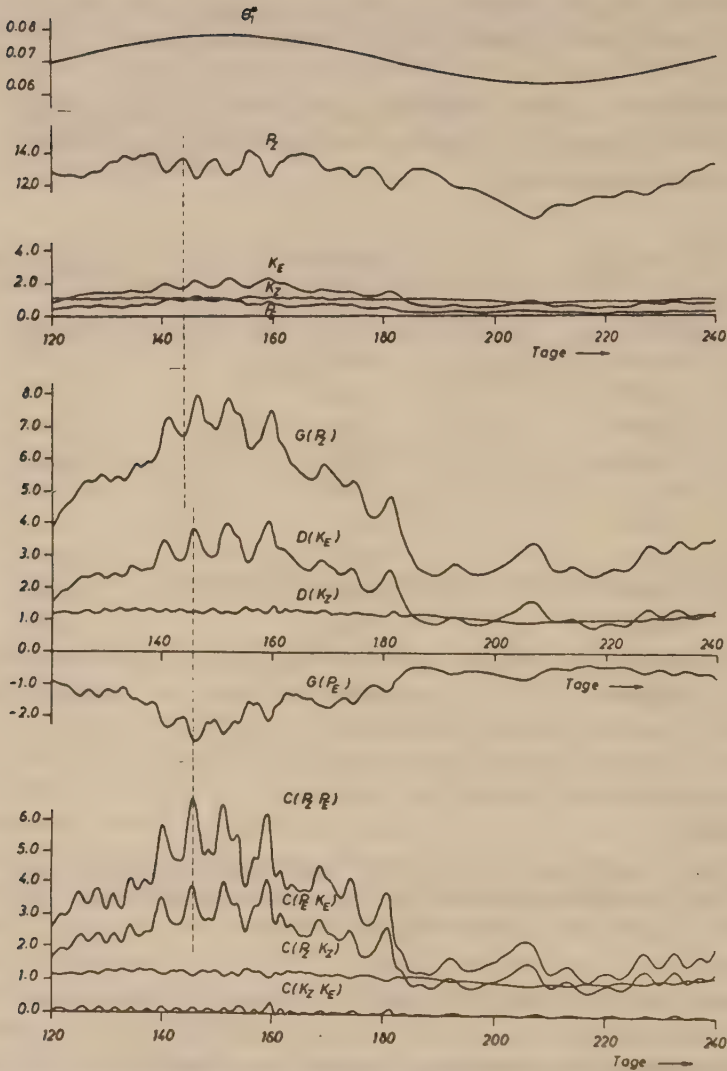


Abb. 18: Verlauf der energetischen Größen (Zirkulationsmodell)

$M = 2, N = 4$

$\Theta_1^* = 9/128, \quad \Theta_1^{*s} = 1/128$. Relative Einheiten.

Erläuterungen siehe Text

Die Abb. 18 zeigt die verschiedenen Energiearten und -übergänge für den Zeitlauf mit zeitabhängigem Θ_1^* . Die entsprechenden Grundstromamplituden sind der Abb. 2d zu entnehmen. Wie schon aus Tab. 1 zu ersehen ist, bewirkt eine Zunahme von Θ_1^* auch eine Zunahme der Energien und Energieumwandlungen und umgekehrt. Bei Betrachtung der Kurzzeitschwankungen (die Betrachtung soll sich auf Zeiträume beschränken, in denen Θ_1^* als Konstante angesehen werden kann) erkennt man, daß einem Maximum von P_z ein Minimum von $G(P_z)$ entspricht, da die Erwärmungsrate bei niedriger Temperatur größer ist als bei hoher Temperatur. Ein Maximum von P_z zieht auch ein Maximum von $C(P_z P_E)$ nach sich, was wiederum ein Maximum an Abstrahlung $|G(P_E)|$ zur Folge hat. Entsprechend reagieren $C(P_E K_E)$ und $D(K_E)$. Die Reaktionen von $C(K_z K_E)$, $D(K_z)$ und $C(P_z K_z)$ sind weniger deutlich.

2. Energieumwandlungen im zonal gemittelten Modell

Im Gegensatz zum Zirkulationsmodell ist das zonal gemittelte Modell ohne Wärmequellen und bei Reibungsfreiheit nicht energieerhaltend. Das Boxdiagramm (Abb. 19) zeigt, daß - neben $G(P_z)$ und $D(K_z)$ - ein Teil von P_z vernichtet wird: $C(P_z P_E) > 0$ und daß K_z Energie zugeführt wird: $C(K_z K_E) > 0$.

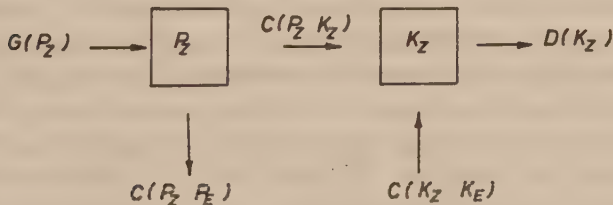


Abb. 19: Energieboxdiagramm für das zonal gemittelte Modell

Die Symbole für die Energieabgabe bzw. -zufuhr werden hier von dem Energiezyklus des Zirkulationsmodells übernommen, obwohl natürlich im zonal gemittelten Modell kein Austausch mit Störungsenergie stattfinden kann. Leider gelingt es nicht, $C(P_z P_E)$, $C(K_z K_E)$ und auch $C(P_z K_z)$ aus den Gleichungen (V.5, V.6 und V.3) mit Hilfe des Parametrisierungsansatzes (II.4) auszurechnen, da die Terme in (V.3) und (V.6) in einer anderen Zusammensetzung als in (II.2) auftreten. Eine Abschätzung von $C(P_z P_E)$ ist aber möglich: Es erweist sich nämlich, daß die in ADVEKTION(θ_i) enthaltene Temperaturadvektion sehr groß ist gegenüber den übrigen Transporttermen, so daß angenähert gilt

$$ADVEKTION(\theta_i) \approx \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^I \frac{C_{ijk}}{G_{00} a_i^2 + 1} (\theta_j \psi_k - \psi_j \theta_k)$$

und damit

$$C(P_z P_E) \approx - \frac{C_{f_0}}{G_{00}} \sum_{i=1}^M \theta_i (G_{00} a_i^2 + 1) ADVEKTION(\theta_i) \quad (V.8)$$

Wenn man noch bedenkt, daß $C(K_z K_E) \ll C(P_z P_E)$, so bestreitet (V.8) näherungsweise die gesamte Energieabgabe im zonal gemittelten Modell, abgesehen von $D(K_z)$. P_z , K_z , $G(P_z)$ und $D(K_z)$ können nach (V.1) und (V.4) berechnet werden. Für jeweils konstante θ_i^* zeigt sich in Tab. 2 gute Übereinstimmung der Energien mit denen des dreidimensionalen Modells. Der zeitliche Verlauf der Energien berechnet mit den Modellgleichungen (III.4) wird in Abb. 20 dargestellt. Der Vergleich mit den gestrichelt eingetragenen energetischen Größen des Zirkulationsmodells zeigt eine sehr gute Übereinstimmung bei den Mittelwerten. Eine Frequenzänderung (wie beim Zirkulationsmo-

dell) kann natürlich auch hier nicht beobachtet werden.

	$\Theta_1^* = 8/128$	$\Theta_1^* = 9/128$	$\Theta_1^* = 10/128$
P_z	10,77	12,28	13,72
K_z	0,85	0,98	1,09
$G(P_z)$	23,82	44,06	68,22
$D(K_z)$	10,10	11,65	12,83
$C(P_z P_E)$	13,93	32,81	55,61

Tabelle 2:

Zeitmittel der energetischen Größen des zonal gemittelten Modells. $M = 2$, ($N = 4$). Relative Einheiten.

Energiebetrachtungen bei Verwendung höherer Auflösung sind wegen des großen Rechenaufwandes beim dreidimensionalen Modell nicht durchgeführt worden.

Zuletzt werden in Abb. 21 die Energien und Energieübergänge gezeigt, wie sie bei Verwendung des Austauschansatzes auftreten. Die zu große "jahreszeitliche" Schwankung von P_z und K_z (verglichen mit den Energien des

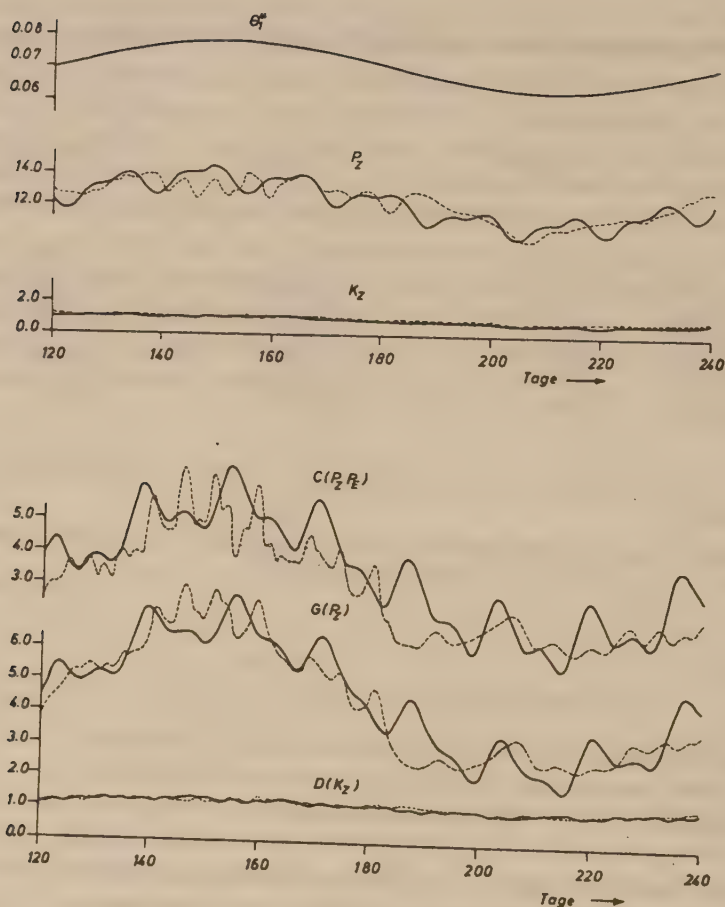


Abb. 20: Verlauf der energetischen Größen. $M = 2$, $(N = 4)$.
 $\bar{\theta}_i^* = 9/128$, $\theta_i^{*s} = 1/128$. Relative Einheiten.
 — zonalgemittelttes Modell (Gleichungen III.4)
 - - - Vergleichsmodell

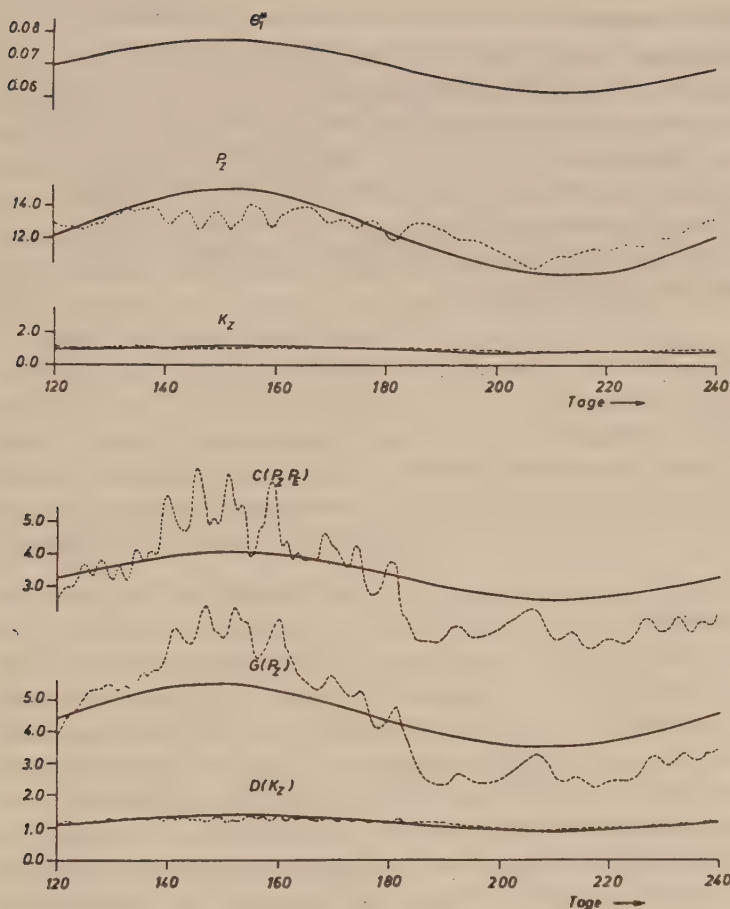


Abb. 21: Verlauf der energetischen Größen

$M = 2$, $(N = 4)$, $\theta_1^s = 9/128$, $\theta_1^{ns} = 1/128$.

Relative Einheiten

———— zonal gemittelttes Modell (Austauschansatz)

----- Vergleichsmodell

Zirkulationsmodells) sind eine Folge der zu großen Schwankungen von θ_n bzw. ψ_n (s. Abb. 15 und 16). Bei K_z ist das weniger deutlich zu sehen, weil die Änderung von K_z sehr klein ist gegenüber der Änderung von P_z . Da bei Zunahme von P_z (höheres meridionales Temperaturgefälle) die Erzeugung von P_z abnimmt, muß die "jahreszeitliche" Schwankung von $G(P_z)$ zu klein ausfallen. Folglich unterliegt auch der Energieübergang $C(P_z P_E)$ zu geringen Schwankungen.

VI. Schlußbemerkung

Zusammenfassend wird festgestellt, daß es mit der hier erarbeiteten Parametrisierungsmethode gelungen ist, das Zeitverhalten des zonalen Grundstroms, das durch das dreidimensionale Vergleichsmodell bei konstant gehaltener Zwangsfunktion bekannt ist, sehr gut wiederzugeben. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber anderen linearen Parametrisierungsansätzen ist darin zu sehen, daß hier auch kurzzeitige Grundstromschwankungen (wie etwa der Indexzyklus) simuliert werden können. Diese spielen zum Beispiel eine entscheidende Rolle für die ozeanische Zirkulation. Aus diesem Grunde wäre - wie schon erwähnt - eine sinnvolle Anwendung eines solchen atmosphärischen Modells in einer Kopplung mit einem Ozeanmodell zu sehen, um die wechselseitige Beeinflussung zwischen Ozean und Atmosphäre studieren zu können.

Bedauerlich ist jedoch, daß die Simulation der Änderung der Grundstromschwankungen (Frequenzen und Amplituden) bei Änderung der Zwangsfunktion nicht gelingt. Erst mit einer zeitabhängigen Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems könnten derartige Änderungen erzielt werden. Das hier angewandte Prinzip, nämlich aus der vorgegebenen Lösung die Parameter der Differentialgleichungen zu bestimmen, ist aber nicht auf lineare Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten ausdehnbar. Es bestehen also wenig Aussichten, daß ein linearer Parametrisierungsansatz mehr als die hier gezeigten Ergebnisse liefern kann.

Ein Ziel der Arbeit war auch, die Leistungsfähigkeit eines Austauschansatzes im Vergleich zu dem hier verwendeten umfassenderen linearen Parametrisierungsansatz zu beleuchten. Es konnte gezeigt werden, daß mit Hilfe des Austauschansatzes keine kurzzeitigen Grundstromschwankungen simuliert werden können, da er nur einen geringen Teil der möglichen Beziehungen zwischen Transporten und Grundstromgrößen berücksichtigt.

Es sollte noch erwähnt werden, daß die hier vorgeschlagene Parametrisierungsmethode auch in zonal gemittelten Gittermodellen Anwendung finden kann. Anstatt die Transporte mit allen spektralen Amplituden der Grundstromvariablen zu verknüpfen, müßte lediglich ein Zusammenhang zwischen den Transporten und den zonal gemittelten Variablen an allen meridional verteilten Gitterpunkten hergestellt werden.

Weiterhin sei noch bemerkt, daß zur Berechnung der Parametrisierungskoeffizienten auch aus Beobachtungen gewonnene Daten an Stelle der Vergleichsrechnung mit einem dreidimensionalen Modell herangezogen werden können.

Literaturverzeichnis

- Adem, J. 1962: On the theory of the general circulation of the atmosphere. *Tellus* 14, 102 - 115.
- Defant, A. 1921: Die Zirkulation der Atmosphäre in den gemäßigten Breiten der Erde. *Geograf. Ann.*, Stockholm, 3, 209 - 266.
- Dolzanskiy, F.V. 1969: Calculating the zonal atmospheric circulation. *Izv. Atmos. Okean. Fiz.* 5, 659 - 671.
- Fleming, R.J. 1971: On stochastic dynamic prediction. I. The energetics of uncertainty and the question of closure. *Mon. Weath. Rev.* 99, 851 - 872.
- Fultz, D. R. R. Long, G.V. Owens, W. Bohan, R. Kaylor and J. Weil 1959: Studies of thermal convection in a rotating cylinder with some implications for large-scale atmospheric motions. *Met. Monographs* 4, No. 21.
- Green, J.S.A. 1970: Transfer properties of the large-scale eddies and the general circulation of the atmosphere. *Q.J.Roy.Met.Soc.* 96, 157 - 185.
- Hasselmann, K. 1976: Stochastic climate models, Part I. Theory. *Tellus* 28, 473 - 484.
- Hide, R. 1953: Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Q.J.Roy. Met.Soc.* 79, 161.
- Lorenz, E.N. 1955: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus* 7, 157 - 167.
- 1960: Energy and numerical weather prediction. *Tellus* 12, 364 - 372.
- 1962: Simplified dynamic equations applied to the rotating-basin experiments. *J. Atm. Sci.* 19, 39-51.
- 1963 a: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atm. Sci.* 20, 130 - 141.
- 1963 b: The mechanics of vacillation. *J. Atm. Sci.* 20, 448 - 464.
- 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus* 17, 322 - 333.

- Metz, W. 1976: Bestimmung des Klimas eines einfachen Zirkulationsmodells. Dissertation , Ludwig-Maximilians Universität, München.
- Oort, A.H. & Rasmusson, E.M. 1971: Atmospheric circulation statistics. U.S. Dept. Commerce, NOAA, Professional Paper 5, 323 pp.
- Phillips, N.A. 1956: The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. Q.J.Roy.Met. Soc. 82, 123 - 164.
- Salmon, R. & Hendershott, M.C. 1976: Large scale air-sea interactions with a simple general circulation model. Tellus 28, 228 - 242.
- Schneider, S. H. & Dickinson R.E. 1974: Climate modeling. Rev. Geophys. Space Phys. 12, 447 - 493.
- Sela, J. & Wiin-Nielsen, A. 1971: Simulation of the atmospheric annual energy cycle. Mon. Weath. Rev. 99, 460 - 468.
- Sellers, W.D. 1969: A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system. J. Appl. Meteorol. 8, 392 - 400.
- Williams, G.P. & Davies, D.R. 1965: A mean motion model of the general circulation. Q. J. Roy. Met. Soc. 91, 471 - 489.
- Wiin-Nielsen, A. & Sela, J. 1971: On the transport of quasi-geostrophic potential vorticity. Mon. Weath. Rev. 99, 447 - 459.
- & Fuenzalida, H. 1975: On the simulation of the axisymmetric circulation of the atmosphere. Tellus 27, 199 - 213.
- Young, J. A. 1968: Comparative properties of some time differencing schemes for linear and nonlinear oscillations. Mon. Weath. Rev. 96, 357 - 364.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

A_σ	Austauschkoeffizient in der oberen Schicht
A_u	Austauschkoeffizient in der unteren Schicht
A	$= (A_\sigma + A_u) / 2$
A'	$= (A_\sigma - A_u) / 2$
a_i^2	definiert in Kapitel II.2
B	Konstante, Gl. (I.6)
C	Skalenfaktor für die Energie (Kapitel V.1)
C_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
C_{ijk}	Wechselwirkungskoeffizienten
$C(a,b)$	Energieumwandlung zwischen a und b
$D(a)$	Dissipation von a
f_0	konstanter Coriolisparameter (10^{-4} sec^{-1})
F_{om}	Orthogonalfunktion der Wellenzahl m, Gl. (I.9)
G_{nm}	Orthogonalfunktion der Wellenzahlen m und n, Gl. (I.9)
$G(a)$	Erzeugung von a
g	Erdbeschleunigung ($= 9,81 \text{ m sec}^{-2}$)
H_{nm}	Orthogonalfunktion der Wellenzahlen m und n, Gl. (I.9)
h	Erwärmungskoeffizient
I	Anzahl der Orthogonalfunktionen
i,j,k	Indizes, die die Orthogonalfunktionen numerieren
$J(a,b)$	Jacobi-Operator ($= \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}$)
K	kinetische Energie (Flächenmittel)
K_z	kinetische Energie des Grundstroms
K_E	kinetische Energie der Störungen
k	Bodenreibungskoeffizient
k'	Koeffizient der inneren Reibung
L	Skalierungsgröße
M	Anzahl der Wellen in y-Richtung
m	Wellenzahl in y-Richtung
N	Anzahl der Wellen in x-Richtung
n	Wellenzahl in x-Richtung

P	verfügbare potentielle Energie (Flächenmittel)
P_z	verfügbare potentielle Energie des Grundstroms
P_E	verfügbare potentielle Energie der Störungen
p	Druck als vertikale Koordinate
p_0	Bodendruck
P_2	Druck an der Grenzfläche beider Schichten
Q	quasi-geostrophische potentielle Vorticity
R_{ij}^w, R_{ij}^o	Konstanten (Kapitel IV.2)
R	Gaskonstante
RS	Rechte Seite einer Differentialgleichung
S_{ij}^w, S_{ij}^o	Konstanten (Kapitel IV.2)
T	Periode der Zwangsfunktion
t	Zeitkoordinate
Δt	Zeitschritt
u	zonale Windgeschwindigkeit
u_σ	" " in der oberen Schicht
u_u	" " in der unteren Schicht
W	Dummy Variable
W_{nm}^s	Störungsamplitude der Wellenzahlen m und n
W_m^F	Grundstromamplitude der Wellenzahl m
X_i	Konstanten (def. in Kap. II)
x	horizontale Koordinate (zonale Richtung)
Y_i	Konstanten (def. in Kap. II)
y	horizontale Koordinate (meridionale Richtung)
Z_i	Konstanten (def. in Kap. II)
α_i^w, α_i^o	Parametrisierungskoeffizienten (Gl. (II.4))
$\beta_{ij}^w, \beta_{ij}^o$	" "
$\gamma_{ij}^w, \gamma_{ij}^o$	" "
$\delta_{ij,h}$	definiert durch Gl. (IV.9)
θ	potentielle Temperatur
θ^*	vorgegebene potentielle Temperatur
$\theta_{ie}^c, \theta_{ie}^s$	ausgewählte Fourierkoeffizienten der Zeitreihe $\theta_i(t)$

λ	Eigenwert
μ	Zeitindex ($= t/\Delta t$)
$\hat{\mu}$	Anzahl der Zeitschritte im Intervall T ($= T/\Delta t$)
γ_e	ausgewählte Frequenzen der Zeitreihen $\psi_i(t), \theta_i(t)$
G_0	konstantes Stabilitätsmaß
τ	Stromfunktion für den vertikalen Scherwind
ϕ	Orthogonalfunktion
φ	Phase der spektralen Wellen
χ	Geschwindigkeitspotential
ψ	Stromfunktion für den vertikal gemittelten Wind
ψ_{ie}^e, ψ_{ie}^s	ausgewählte Fourierkoeffizienten der Zeitreihe $\psi_i(t)$
ω	generalisierte Vertikalgeschwindigkeit ($= \frac{d\rho}{dt}$)
∇	Nabla-Operator ($= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})_p$)
$\overline{(\quad)}$	Zeitmittel
$(\quad)_0$	dimensionslose Größe
$\overline{(\quad)}^z$	zonales Mittel
$\overline{(\quad)}^y$	meridionales Mittel

Lebenslauf

Am 9.6.1943 wurde ich, Gisela Hartjenstein, als Tochter des Dipl.Ing. Rudolf Hartjenstein und seiner Ehefrau Else in Düsseldorf geboren. Von 1949 bis 1954 besuchte ich die Volksschule in Düsseldorf. Danach trat ich in das Gymnasium Goethe-Schule I in Düsseldorf ein und legte dort am mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig 1963 die Reifeprüfung ab. Anschließend begann ich das Studium der Meteorologie an der TH Darmstadt. Nach dem Vordiplom wechselte ich 1966 die Hochschule und führte das Studium an der Ludwig-Maximilians Universität München fort. Dieses schloß ich Anfang 1969 mit der Diplomprüfung ab. Bis Ende 1969 war ich als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Meteorologie der Forstlichen Forschungsanstalt in München beschäftigt. Seither bin ich als wissenschaftliche Angestellte am Institut für Theoretische Meteorologie in München (heute: Meteorologisches Institut) tätig.

